

Les pentaminos amis

Jean-Paul Delahaye, professeur émérite
Université de Lille, laboratoire CRISTAL UMR CNRS 9189

La rubrique *Récréations informatiques* propose une petite énigme algorithmique ou sur un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel du problème précédent – *Magie arithmétique*

La magicienne des nombres n'a qu'un seul rêve : vous étonner. Elle pose sur la table un verre transparent dans lequel un foulard froissé a été enfoncé. Elle vous donne un papier et un crayon et vous invite à choisir un nombre N de quatre chiffres possédant au moins deux chiffres différents. Les nombres 3333 et 5555 ne sont pas autorisés, mais 4359 ou 4455 conviennent. Elle demande :

« Classez les chiffres de N par ordre croissant, cela vous donne un nombre X à quatre chiffres qui commence peut-être par des zéros comme 0035. Classez les chiffres de N par ordre décroissant, cela vous donne un nombre Y à quatre chiffres. Calculez $Z = Y - X$. Recommencez à partir de Z les mêmes opérations. Faites cela jusqu'à ce que cela devienne inutile car le Z que vous obtenez redonne Z . ».

En quelques secondes vous faites ce qui a été demandé et vous disposez donc d'un résultat Z à quatre chiffres. La magicienne tire alors le foulard du verre et le déploie. Il y est écrit 6174.

C'est effectivement le Z que vous avez trouvé. N'est-il pas paradoxal et magique qu'elle ait pu savoir à l'avance que vous alliez obtenir 6174 ?

À l'aide de votre ordinateur vous trouverez assez facilement la solution, aussi deux autres questions sont posées dont je ne connais pas les réponses :

- peut-on démontrer le résultat sans utiliser d'ordinateur ?
- quelles sont les généralisations envisageables du résultat ?

Solution

Merci à Jean-Jacques Pansiot et Éric Węgrzynowski qui m'ont fait parvenir des solutions intéressantes. La réponse est bien sûr, que quel que soit le nombre N de départ, on finit toujours par tomber sur 6174!

C'est une propriété vérifiable par un calcul fini consistant à essayer tous les N possibles. J'ai écrit un petit programme et je me suis assuré qu'on obtient effectivement toujours $Z = 6174$. La preuve par l'ordinateur est un peu décevante mais ne laisse aucun doute. Les démonstrations sans utiliser de programme proposées par les lecteurs sont correctes mais un peu longues pour être reproduites ici. Voici quelques informations supplémentaires sur cette bizarrerie des nombres à quatre chiffres qui aujourd'hui ne possède aucune explication générale :

- aucun autre nombre que 6174 ne retombe sur lui-même quand on mène le calcul demandé;
- le nombre maximum d'étapes de calcul pour arriver à 6174 est 7. C'est par exemple ce qui se passe pour 1400 qui donne successivement : $1400 \rightarrow 4086 \rightarrow 8172 \rightarrow 7443 \rightarrow 3996 \rightarrow 6264 \rightarrow 4176 \rightarrow 6174$;
- le nombre moyen d'étapes de calcul avant d'arriver à 6174 est 4,7. Ce nombre d'étapes prend toutes les valeurs possibles entre 0 (pour 6174) et 7 (pour 1400). Le tableau suivant indique précisément combien de nombres X exigent N étapes de calcul :

0	1	2	3	4	5	6	7
1	356	519	2124	1124	1379	1508	1980

Le même miracle se produit encore quand on part d'un nombre de 3 chiffres (non tous égaux). Ils conduisent invariablement à 495. Cette étrange propriété des nombres 6174 et 495 a été découverte par le mathématicien indien Dattatreya Kaprekar (1905-1986) en 1949.

Nous sommes dans une situation où on découvre un résultat inattendu, qu'on prouve facilement par la force du calcul, mais qu'au fond on ne comprend pas. Le mystère est d'autant plus profond que si on essaye la même chose en partant de nombres de 5 chiffres, cette fois ça ne marche plus : tous les nombres conduisent à des cycles — il ne peut pas en être autrement — mais pas nécessairement le même. Éric Węgrzynowski qui a exploré le problème indique : « En opérant avec cinq chiffres, l'itération de la fonction conduit toujours à l'un des trois cycles :

- (63954, 61974, 82962, 75933);
- (59994, 53955);
- (83952, 74943, 62964, 71973).

De plus, parmi les nombres de cinq chiffres à 1, 2, 3, 4 ou 5 chiffres significatifs ayant au moins deux chiffres distincts, 48480 nombres conduisent au premier de ces cycles, 3190 conduisent au deuxième et 48320 au troisième.»

Bibliographie

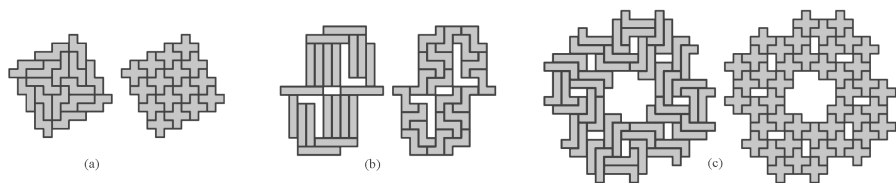
- Yutaka Nishiyama, Mysterious number 6174¹.
- Brady Haran, Numbers 6174, Numberphile².
- Dattatreya Kaprekar, Another solitaire game, *Scripta Mathematica* 15, 244–245, 1949.

Nouveau problème – *Les pentaminos amis*

Les pentaminos sont les formes d'un seul tenant composées de cinq carrés collés par leurs côtés. Il existe 12 pentaminos dont la liste est donnée ci-dessous.



Deux pentaminos sont «amis» si, par définition, il existe une même forme F qu'ils pavent chacun de leur côté.



Le dessin (a) montre que le pentamino N est ami avec le X. Le dessin (b) montre que le I et le Z sont amis, et le dessin (c) montre que le L et le X le sont aussi. Cette notion a été introduite en 1996 par Rodolfo Kurchan dans son livre *Puzzle fun* où il traite quelques cas. Chacune de 66 paires possibles

1. <https://plus.maths.org/content/mysterious-number-6174>, consulté en 2025.

2. https://www.youtube.com/watch?v=d8TRcZk1X_Q, consulté en 2025.

de pentaminos crée un problème ludique et parfois difficile. Un bon programme est sans doute nécessaire pour les résoudre.

À vous de les étudier en tentant de remplir le tableau ci-dessous. Dans chaque case du tableau il faut écrire une croix s'il n'y a pas d'amitié possible entre les deux pentaminos (et que vous arrivez à le démontrer), ou un entier donnant le plus petit nombre de pièces prouvant l'amitié. Personne aujourd'hui n'a pu remplir toutes les cases. C'est donc un problème ouvert.

	I	L	N	P	T	U	V	W	X	Y	Z
F											
I											20
L									44		
N									16		
P											
T											
U											
V											
W											
X											
Y											

Les dessins suivants justifient que l'on place quelques « 2 » dans le tableau.

