

Réseaux de Petri dans le premier degré

Alain Busser, professeur de NSI

Lycée Roland-Garros du Tampon, IREMI de La Réunion

Dans cet article, on relate une expérience de médiation menée dans des écoles et collèges (essentiellement en cycle 3) lors des fêtes de la science 2019 et 2020, autour d'un artefact de calcul peu connu : les réseaux de Petri.

Définitions

Réseau de Petri – Places et transitions

Un *réseau de Petri* est un graphe orienté biparti, c'est-à-dire un dessin comme celui de droite, où des *sommets* (ronds ou carrés) sont reliés par des *arcs* (des flèches).

Ci-contre le graphe est parfois qualifié de « multi-graphe » parce qu'il peut y avoir plusieurs arcs reliant deux sommets donnés.

Les sommets sont de deux sortes :

- les sommets ronds s'appellent des *places* ;
- les sommets rectangulaires (ici, carrés) s'appellent des *transitions*.

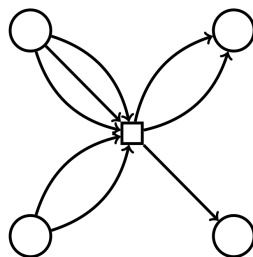


Fig. 1. Un réseau de Petri.

Graphe biparti

Que le graphe soit biparti se traduit ici par le fait qu'aucun arc ne va d'une place à une place ni d'une transition à une transition. Tout arc va :

- ou bien d'une place vers une transition ;
- ou bien d'une transition vers une place.

Un premier jeu abordable dès le cycle 3, consiste simplement à dessiner un réseau de Petri, c'est-à-dire un graphe vérifiant les propriétés ci-dessus. Mais un réseau de Petri est un objet statique, et lorsque Carl Adam Petri a créé cette notion en 1962 [4], ce n'était pas seulement pour les dessiner, mais pour jouer avec [2]. Pour cela il faut des *jetons*.

Réseau de Petri marqué

Un *marquage* d'un réseau de Petri, consiste à placer dans certaines places, des jetons. Par exemple, on voit sur la figure 2 un marquage du réseau de Petri précédent, par 4 jetons.

Les jetons sont dessinés l'un à côté de l'autre pour mieux les dénombrer, mais avec les élèves, on a utilisé des jetons plats et empilés. Reste à voir comment les manipuler.

Manipulation des jetons

Le mot *jeton* suggère une activité de médiation basée sur les réseaux de Petri ; elle nécessite le matériel suivant :

- une feuille format A4 par réseau de Petri (le réseau pouvant être imprimé avant l'activité, ou dessiné par les élèves eux-mêmes, ils adorent ça) ;
- des jetons (graines ou jetons plats style poker) en quantité suffisante pour occuper les places au cours de l'activité ;
- un espace (par exemple une boîte) pour stocker les jetons qui ne sont pas sur le réseau de Petri ;
- (en cycle 4) un tableau pour noter les marquages initiaux et finals d'un réseau de Petri (afin d'émettre des conjectures).

Le projet initial était de tester l'apprentissage de problèmes du champ additif par les réseaux de Petri. Par exemple le problème suivant :

*Lucie a perdu 3 billes à la récréation. Il lui reste 5 billes.
Combien de billes avait-elle avant la récréation ?*

se modélise par le réseau de Petri marqué ci-contre (voir plus bas pour le pourquoi du comment : le problème est évidemment de reconstituer l'état initial du réseau, c'est-à-dire le marquage qui précédait celui que l'on voit ci-contre).

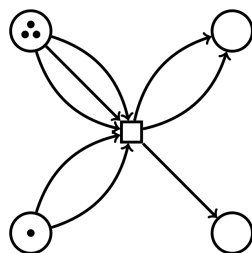


Fig. 2. Un réseau de Petri marqué.



Les calculs que l'on fera plus bas avec des réseaux de Petri utilisent la numération unaire (l'entier n est codé par n jetons) ce qui permet à des élèves ne connaissant pas la numération, de mener ces calculs quand même.

Le premier public visé était composé d'élèves de cycle 2 ou de classes ULIS. Un concours de circonstances (parmi lesquelles un certain coronavirus) a empêché de toucher ce public. Ce sont donc des élèves des cycles 3 et 4 qui ont bénéficié de l'activité. Cela a permis de les familiariser avec les graphes, l'arithmétique et les systèmes d'équations linéaires, ainsi que les notions d'algorithmes, terminaison des algorithmes et invariants.

Places et transitions

Les places du réseau de Petri s'appellent ainsi, parce que c'est là que l'on place des jetons. Pour le marquage initial, mais aussi lors des différentes étapes du calcul.

Les transitions s'appellent ainsi parce que les jetons ne font qu'y transiter. Dans l'exemple de la figure 2 ci-dessus, on constate que la transition a un degré entrant égal à 5 (il y a 5 flèches qui arrivent vers cette transition) mais un degré sortant égal à 3 seulement (3 flèches sortent cette transition). Comme on le verra un peu plus loin, il y aura une perte nette de $5 - 3 = 2$ jetons lorsque l'on déclenchera la transition. Pour gérer ce phénomène (possibilité que des jetons soient perdus ou ajoutés lors de la transition), on dispose une boîte contenant beaucoup de jetons entre les joueurs. Par exemple sur une table carrée, avec 4 joueurs disposés aux points cardinaux, on dispose cette boîte au centre de la table. On appelle *banque de jetons* cette boîte. Alors, si le déclenchement d'une transition requiert plus de jetons qu'il y en a, on puise les jetons supplémentaires dans la banque, et s'il y a des jetons à retirer du réseau de Petri, on les place dans la banque.

Le réseau de Petri de la figure 2 est bloqué (on dit qu'il est *mort*) parce que son unique transition ne peut être déclenchée. Pour que la transition puisse être déclenchée (on dit alors qu'elle est *vivante*), il faut qu'il y ait au moins 3 jetons dans la place en haut à gauche (autant que de flèches partant de la place vers la transition, c'est le cas ici), mais aussi au moins 2 jetons dans la place en bas à gauche. Or ici il n'y a qu'un jeton, ce qui suffit à bloquer la transition.

Déclenchement d'une transition

Le marquage de la figure 4, partie de gauche, en revanche, permet à la transition de se déclencher.

En effet pour que la transition puisse se déclencher, il faut au moins 3 jetons dans la place en haut à gauche (or $5 \geq 3$) et 2 jetons dans la place en bas à gauche (or $6 \geq 2$). Dans la suite de cet article, on convient de colorier

les transitions actives. S'il y a au moins une transition qui peut être déclenchée, le réseau de Petri est dit *vivant*.

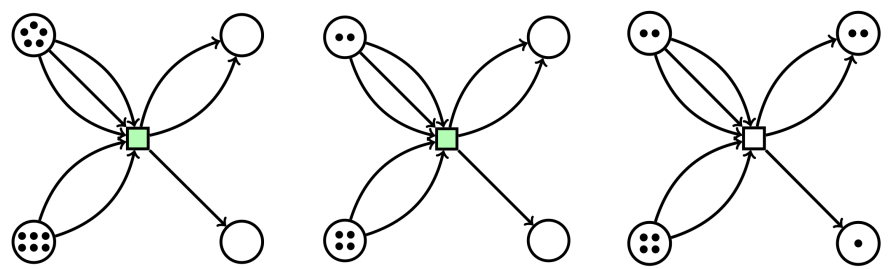


Fig. 4. De gauche à droite : marquage initial, transition à moitié tirée, transition tirée.

Le déclenchement d’une transition se fait en deux temps :

- tout d’abord, un jeton glisse le long de chacun des arcs entrants pour aller dans la banque (résultat sur le réseau au milieu de la figure 4) ;
- ensuite, des jetons sont prélevés de la banque pour glisser le long des arcs sortant de la transition, pour se placer dans les places en aval (résultat sur le réseau à droite de la figure 4).

On constate qu’il y a moins de 3 jetons dans la place en haut à gauche et la transition n’est donc plus active : le réseau de Petri est mort, et le calcul s’est achevé. Le résultat du calcul est, ici, égal à $(2, 1)$, que l’on lit sur les deux places à droite sur le réseau.

Initiation à l’algèbre linéaire

En cycle 4, on peut faire jouer plusieurs élèves sur le même réseau de Petri (cela a été fait lors de la semaine des maths, en séances d’une demi-heure ou d’une heure selon le collège) et faire remplir un tableau, où, en appelant a et b les nombres de jetons dans les places de gauche, c et d celles de droite, on sait que $a \geq 3$ et $b \geq 2$ (sinon on a automatiquement $c = d = 0$) et l’exemple ci-dessus amène à cette ligne du tableau :

a	b	c	d
5	6	2	1
...	...	...	...
...	...	...	...

La question est alors de trouver deux fonctions f et g de deux variables (deux expressions en a et b) telles que

$$c = f(a, b) \quad \text{et} \quad d = g(a, b) \quad (1)$$

Avec la moitié d'une classe de 3^e, en répartissant bien les marquages initiaux entre élèves, on a en quelques minutes une quinzaine de lignes dans le tableau précédent, ce qui amène alors à l'émission de conjectures sur l'expression algébrique de f et g .

Calcul par réseaux de Petri

Un réseau de Petri peut très bien ne jamais mourir, comme par exemple celui-ci :

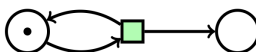


Fig. 5. Réseau de Petri immortel.

En effet, comme la transition réinjecte un jeton dans la place de gauche, elle est éternellement vivante et elle va éternellement injecter un jeton dans la place de droite.

Mais lorsqu'un réseau de Petri s'arrête au bout d'un temps fini, certaines places (en général initialement vides) contiennent un nombre de jetons qui dépend du nombre de jetons dans les places du départ, et le réseau de Petri a calculé les nombres d'arrivée, qui sont fonction des nombres de départ. On peut alors (se) poser deux questions :

- étant donné un réseau de Petri, que calcule-t-il ?
- étant donné une fonction, quel réseau de Petri la calcule ?

Ci-après on va voir comment effectuer les 4 opérations avec des réseaux de Petri, mais pour la multiplication et la division on aura besoin d'arcs inhibiteurs.

Addition

Un réseau de Petri effectuant une addition doit avoir au moins trois places :

- une pour le premier terme de la somme ;
- une pour le second terme ;
- et une pour la somme ;

et au moins deux transitions (une par terme). Le réseau de Petri de la figure 6 est donc minimal.

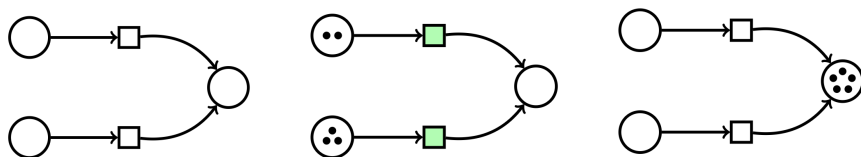


Fig. 6. Un réseau de Petri effectuant une addition.

Pour calculer $2 + 3$, on place respectivement 2 jetons et 3 jetons dans les places de gauche (voir le réseau au centre de la figure 6). Les deux transitions sont vivantes, on a donc le choix entre déclencher celle du haut ou déclencher celle du bas. Chaque fois qu'on déclenche une transition, cela a pour effet de transférer un jeton depuis sa place d'origine, vers la place d'arrivée. Ceci peut être fait dans l'ordre qu'on veut¹, et lorsque plus aucune des transitions ne peut être déclenchée, on arrive à la fin de l'addition (voir le réseau à droite sur la figure 6).

Soustraction

Le réseau de Petri ci-dessous (figure 7) à gauche, permet d'effectuer une soustraction.

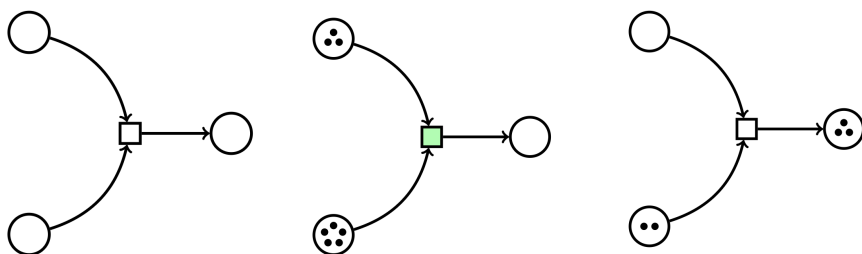


Fig. 7. Un réseau de Petri effectuant une soustraction.

En effet si on le marque avec respectivement 3 et 5 jetons (image centrale de la figure 7), alors il finit son calcul avec 2 jetons dans la place du bas (image de droite de cette même figure). Cette disposition permet de savoir :

- que $|5 - 3| = 2$ (le nombre de jetons dans la place de gauche);

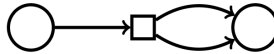
1. On dit qu'un tel réseau de Petri est *asynchrone*.

- que 5 était le plus grand des deux nombres (la place non vide est celle du bas, qui contenait initialement 5 jetons);
- et que le plus petit des deux nombres est 3 (nombre de jetons dans la place de droite).

Ce réseau est recyclé dans la partie suivante, la soustraction intervenant dans la division euclidienne ainsi que dans l'algorithme d'Euclide.

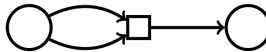
Vers le binaire

Voici un réseau de Petri doubleur :

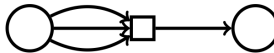


Si on l'initialise avec n jetons dans la place de gauche, il finira avec $2 \times n$ jetons dans la place de droite. Il a été construit à partir de l'additionneur en fusionnant les deux termes.

On peut inverser les rôles du nombre et son double :



ce qui donne un réseau de Petri diviseur par 2. La division en question est euclidienne (il y a un reste dans la place de gauche à la fin du calcul, et le quotient est dans la place de droite). On peut le généraliser à un réseau de Petri diviseur par 3 :



En multipliant des étages identiques, on aboutit à un convertisseur unaire $\rightarrow$ binaire :



c'est-à-dire que si on place n (par exemple 5) jetons dans la place de droite :



le calcul se termine avec la représentation binaire de n (ici 101) (qui se lit de gauche à droite) :



Ce réseau de Petri (en fait la version à 4 places qui convertit en binaire les nombres allant de 0 à 15) a eu beaucoup de succès en cours moyen, probablement parce qu'il faut un temps raisonnable pour effectuer les 16 conversions. On peut l'étendre de manière à modéliser l'abaque binaire de Neper comme un réseau de Petri [3].

Réseaux de Petri à arcs inhibiteurs

Un arc (ou flèche) allant d'une place à une transition a pour effet de permettre la transition s'il y a au moins un jeton en amont de l'arc. Un *arc inhibiteur* (représenté par une pointe de flèche circulaire) a l'effet contraire : la transition ne peut se déclencher que s'il n'y a *pas* de jeton en amont. Pour qu'une transition soit vivante il faut alors :

- qu'en amont de chaque arc venant vers la transition, il y ait au moins un jeton ;
- qu'en amont de tous les arcs inhibiteurs, les places soient vides.

Par exemple, malgré la présence de 6 jetons en amont de la transition que l'on voit sur la figure 14, elle ne peut pas être déclenchée parce qu'il y a 2 jetons dans la place en amont de l'arc inhibiteur.

Un théorème [5] affirme que pour toute fonction calculable, il existe un réseau de Petri à 2 (maximum) arcs inhibiteurs la calculant au sens vu précédemment (voir la section « Calcul par réseaux de Petri »). Voici-après des réseaux de Petri effectuant certaines opérations, et inédits jusqu'ici.

Multiplication

On voit sur la figure 15 un réseau de Petri à deux arcs inhibiteurs permettant d'effectuer une multiplication.

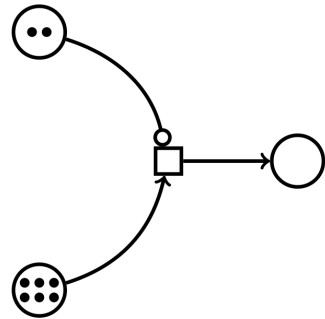


Fig. 14. Réseau de Petri avec arcs inhibiteurs.

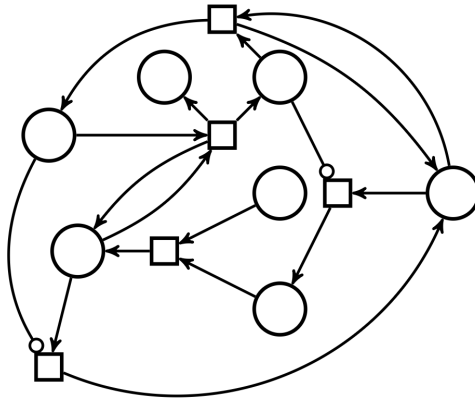


Fig. 15. Réseau de Petri pour multiplier.

Pour multiplier 3 par 2, on le marque comme on le voit sur la figure 16 (remarque : on peut aussi intervertir les places contenant 3 et 2 jetons, cela donne le même résultat, ce qui ne saute pas aux yeux).

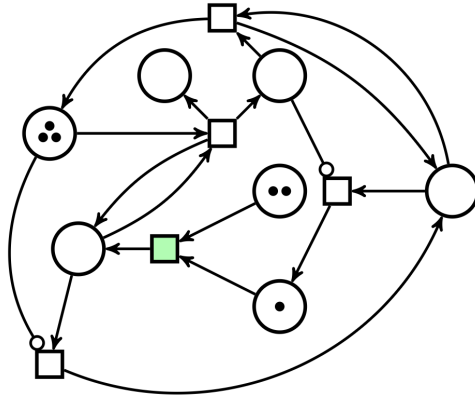


Fig. 16. Marquage initial pour multiplier 2 par 3.

Le jeton seul vers le bas est dans une place binaire : une telle place ne contient qu'un jeton maximum au cours du calcul. Ce jeton joue le rôle d'un *marqueur* permettant de contrôler les étapes de calcul (en s'arrangeant pour qu'une et une seule transition soit active à un instant donné²). Une fois le calcul terminé on a le produit dans la place finale (confer figure 17).

2. Les transitions inhibitrices servent à rendre synchrone un réseau de Petri, qui est par nature asynchrone.

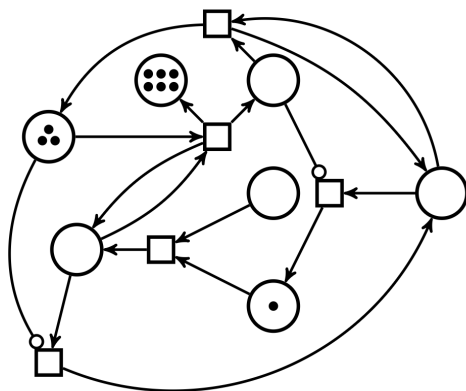


Fig. 17. Multiplication effectuée.

Division euclidienne

Le réseau de Petri de la figure 18 comporte 3 arcs inhibiteurs.

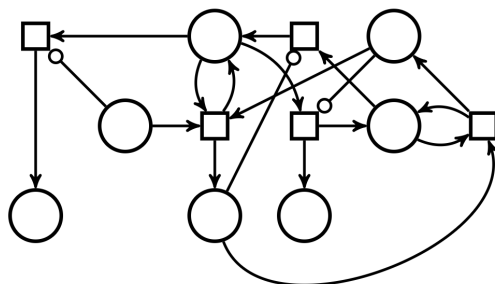


Fig. 18. Réseau de Petri avec trois arcs inhibiteurs.

Ce réseau effectue (par soustractions itérées) une division euclidienne. Par exemple pour diviser 5 par 2, on dispose un marqueur dans une place binaire, 5 jetons dans la place du dividende (cette place contiendra le reste à la fin du calcul) et 2 jetons dans la place du diviseur (ce réseau de Petri ne calcule rien si le diviseur est nul); voir la figure 19.

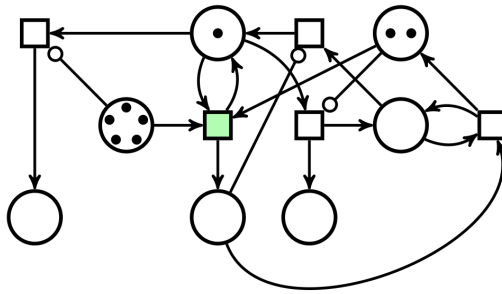


Fig. 19. Préparation de la division euclidienne.

Une fois que le réseau de Petri a terminé le calcul, le marqueur est dans la place binaire tout en bas à gauche, le reste 1 est dans la place suivante (en bas) et le quotient 2 est dans la place suivante (voir figure 20).

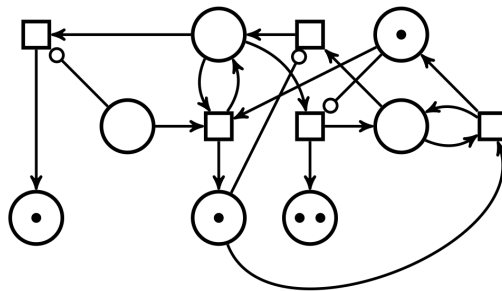


Fig. 20. Résultat de la division euclidienne.

Calcul de pgcd

Le réseau de Petri suivant matérialise l'algorithme d'Euclide (avec soustractions itérées) mais avec pas moins de 6 arcs inhibiteurs :

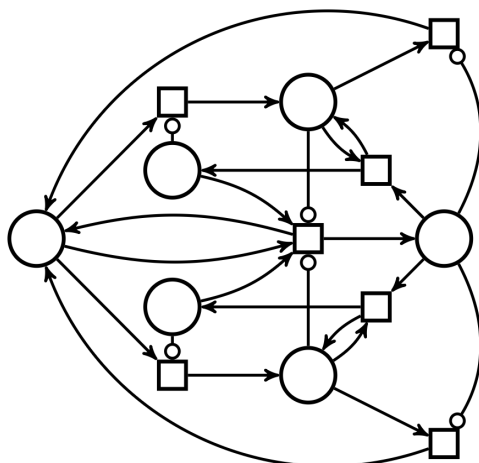


Fig. 21. Réseau de Petri permettant le calcul du pgcd.

Pour calculer le pgcd de 5 et 3, on place respectivement 5 jetons et 3 jetons dans les places prévues pour cela (celle qui sera non vide à la fin, contiendra alors le pgcd) et un marqueur dans la place binaire tout à gauche :

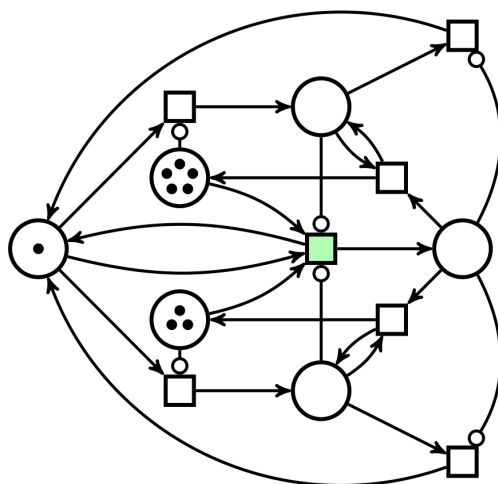


Fig. 22. Marquage pour préparer le calcul du pgcd.

Le calcul est terminé lorsque le marqueur est tout à gauche, et l'une des places suivantes est vide. L'autre contient le pgcd 1.

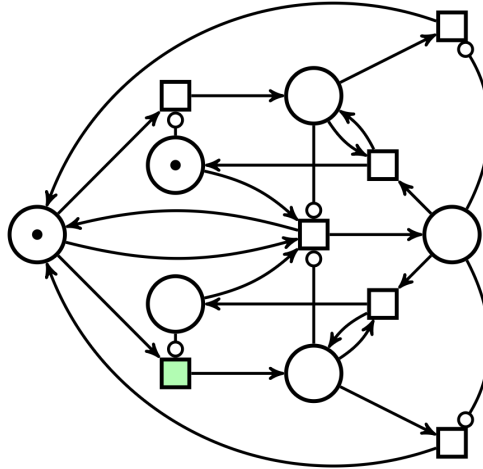


Fig. 23. Calcul du pgcd terminé.

Ce réseau de Petri a permis de faire calculer des pgcd en cycle 3, alors même que la notion n'est pas définie : il s'agit d'un jeu dont seule la règle est connue, et pas la motivation (vue en cycle 4). On voit là un exemple archétypal de *jeu sérieux* (dont la pratique permet d'apprendre sans même se rendre compte que l'on apprend). De plus, la pratique de ce réseau de Petri amène à des raccourcis comme le remplacement de 3 mouvements successifs de jetons, par un déplacement des 3 jetons d'un coup, une fois qu'on a compris (par la pratique) que cela revient au même.

On peut donc estimer que le réseau de Petri ci-dessus est une représentation graphique de l'algorithme d'Euclide avec une symétrie visible, qui prouve sans mot que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a)$, et de même, les réseaux de Petri précédents représentent graphiquement les algorithmes des 4 opérations :

- addition par incrémentation d'une variable et décrémentation de l'autre, jusqu'à la nullité de celle-ci,
- soustraction par décrémentation simultanée des deux variables,
- multiplication par addition itérée,
- division euclidienne par soustraction itérée.

Les réseaux de Petri sont donc une activité débranchée sur les algorithmes (de calculs sur des vecteurs d'entiers) et permettent de découvrir par la manipulation, certaines propriétés de ces algorithmes, comme par exemple la symétrie du pgcd ou la notion d'invariant.

Références

- [1] Alain Busser. 2019. Réseaux de Petri. Consulté à l'adresse <https://iremi.univ-reunion.fr/?p=627>.
- [2] Alain Busser. 2020. *Jeux et Graphes*. Ellipses.
- [3] Alain Busser. 2021. L'abaque de Neper, un artéfact quatre fois centenaire pour enseigner le binaire. Consulté à l'adresse <http://revue.sesamath.net/spip.php?article1432>.
- [4] Carl Adam Petri. 1962. *Kommunikation mit automaten*. Dissertation, Schriften des IIM 2, Rheinisch-Westfälisches Institut für Instrumentelle Mathematik an der Universität Bonn.
- [5] Dimitri Zaitsev et ZhuWu Li. 2017. On simulating Turing machines with inhibitor Petri nets. *IEEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering*, 13.