

Magie arithmétique

Jean-Paul Delahaye, professeur émérite
Université de Lille, laboratoire CRISTAL UMR CNRS 9189

La rubrique «Récréation informatique» propose une petite énigme algorithmique ou sur un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel du problème précédent *Une bataille sans bataille*

On dispose d'un jeu de cartes qui en contient n , n un entier supérieur ou égal à 2. Chaque carte porte un numéro de 1 à n qui détermine sa force. On mélange les cartes, on coupe le paquet en deux sous-paquets qui peuvent être inégaux. On tire à pile ou face l'attribution des paquets. Les joueurs tiennent leur paquet les faces vers le sol (donc sans voir la force des cartes). Chacun pose la carte du dessus de son paquet sur la table en la retournant. La carte la plus forte gagne. Le joueur gagnant range les deux cartes jouées sous son paquet en plaçant la sienne en premier puis celle qu'il vient de prendre. Il place la sienne en premier car elle est la plus forte des deux et qu'il souhaite qu'elle revienne le plus rapidement possible. Il n'y a jamais de bataille (deux cartes de même force) car ici toutes les cartes ont des forces différentes. Si l'un des joueurs n'a plus de cartes, il a perdu. Tout est donc parfaitement déterminé dès que la distribution des cartes est fixée.

La question est : se peut-il qu'une partie soit infinie, c'est-à-dire qu'elle boucle? Plus précisément, pour quelles valeurs de n et quelles distributions a-t-on une boucle?

On peut aborder le problème en faisant des programmes (qui vont rechercher des cycles) ou par le raisonnement. Précisons que le problème n'est pas facile et que d'ailleurs, il est aujourd'hui incomplètement résolu.

Solution

Le premier élément de solution est qu'il existe des cycles pour tous les entiers n qui ne sont pas de la forme 2^k avec $k \geq 1$, ni de la forme $3 \cdot 2^k$ avec $k \geq 0$. Autrement dit, il existe des cycles pour les entiers qui n'appartiennent pas à l'une des séries :

$$2, 4, 8, 16, 32, \dots, 2^k, \dots \quad \text{ou} \quad 3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots, 3 \cdot 2^k, \dots$$

Voici quelques exemples de distributions conduisant à des cycles :

- début d'un cycle pour $n = 5$, joueur 1 = [5, 3], joueur 2 = [2, 4, 1];
- début d'un cycle pour $n = 7$, joueur 1 = [7, 4], joueur 2 = [3, 6, 2, 5, 1];
- début d'un cycle pour $n = 9$, joueur 1 = [9, 5, 8, 4], joueur 2 = [3, 7, 2, 6, 1];
- début d'un cycle pour $n = 10$, joueur 1 = [8, 6, 3, 10, 5], joueur 2 = [2, 9, 7, 4, 1].

Une méthode générale pour tous les nombres impairs consiste à prendre les jeux sous la forme : joueur 1 = $[A, B, A, B, \dots, A, B]$ (k fois A, B); joueur 2 = $[B, A, B, A, \dots, B, A, B]$ (k fois B, A , suivi de B , ou $k + 1$ fois B, A suivi de B). On sépare ensuite les entiers de 1 à n en deux paquets disjoints : l'un contenant les entiers les plus élevés donnera (dans un ordre quelconque) les entiers pour remplacer les A , l'autre les entiers les moins élevés donnera les entiers pour remplacer les B .

Exemple. Pour $n = 9$, on aura : joueur 1 = $[A, B, A, B]$ et joueur 2 = $[B, A, B, A, B]$ avec les entiers 9, 8, 7, 6 pour remplacer les A , et les entiers 5, 4, 3, 2, 1 pour remplacer les B , ce qui donnera un grand nombre de cycles différents, dont celui-ci : joueur 1 = [9, 1, 6, 2] et joueur 2 = [5, 8, 4, 7, 3].

Une démonstration qu'il y a des cycles pour les n de la forme $m \cdot 2^k$ avec $k \geq 0$, et m impair > 3 , est donnée dans l'article de M. Spivey, *Cycle in war, Integers, Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 747–764, 2010¹.

Les recherches par programme de cycles pour $n = 2, 4, 6, 8, 12$ ont pu être menées exhaustivement par Philippe Mathieu du laboratoire Cristal à l'université de Lille, et permettent de dire qu'il n'y a pas de cycles. Pour les autres valeurs de n de la forme 2^k , $k \geq 1$ ou $3 \cdot 2^k$, $k \geq 0$, des calculs massifs par essais aléatoires ont été menés. Ils n'ont pas permis de trouver de cycle. Il est donc conjecturé que la condition « n est de la forme $m \cdot 2^k$ pour $k \geq 0$ et m impair > 3 » est non seulement suffisante pour qu'il existe des cycles (c'est un des résultats de M. Spivey), mais qu'elle est aussi nécessaire.

Vous trouverez à cet URL² les résultats d'un concours ouvert en continu à tous pour la recherche des plus longues parties possibles. Aujourd'hui par exemple le gagnant pour 32 cartes est Clément Courbet qui, le 20 février 2025, a découvert la distribution :

1. <https://math.colgate.edu/~integers/kg2/kg2.pdf>.

2. <https://github.com/cristal-smac/bataille>.

joueur 1 = [3, 9, 29, 23, 11, 18, 20, 2, 8, 25, 22, 13, 1, 32, 15, 17]

joueur 2 = [12, 7, 26, 14, 31, 21, 16, 5, 27, 30, 24, 6, 10, 19, 28, 4]

qui engendre une partie de 1810 plis avant de s'arrêter. Les records sont difficiles à battre !

L'article de Philippe Mathieu et moi-même «*À la recherche de batailles infinies*» (Pour la science, janvier 2025, p.80-85), donne des précisions sur le problème des parties de bataille, quand on considère une ou plusieurs couleurs et différentes façons de ranger les cartes gagnées.

Nouveau problème – Magie arithmétique

La magicienne des nombres n'a qu'un seul rêve : vous étonner. Elle pose sur la table un verre transparent dans lequel un foulard froissé a été enfoncé. Elle vous donne un papier et un crayon et vous invite à choisir un nombre N de quatre chiffres possédant au moins deux chiffres différents. Les nombres 3333 et 5555 ne sont pas autorisés, mais 4359 ou 4455 conviennent. Elle demande :

« Classez les chiffres de N par ordre croissant, cela vous donne un nombre X à quatre chiffres qui commence peut-être par des zéros comme 0035. Classez les chiffres de N par ordre décroissant, cela vous donne un nombre Y à quatre chiffres. Calculez $Z = Y - X$. Recommencez à partir de Z les mêmes opérations. Faites cela jusqu'à ce que cela devienne inutile car le Z que vous obtenez redonne Z . ».



En quelques secondes vous faites ce qui a été demandé et vous disposez donc d'un résultat Z à quatre chiffres. La magicienne tire alors le foulard du verre et le déploie. Il y est écrit 6174.

C'est effectivement le Z que vous avez trouvé. N'est-il pas paradoxal et magique qu'elle ait pu savoir à l'avance que vous alliez obtenir 6174?

À l'aide de votre ordinateur vous trouverez assez facilement la solution, aussi deux autres questions sont posées, dont je ne connais pas les réponses :

- peut-on démontrer le résultat sans utiliser d'ordinateur?
- quelles sont les généralisations envisageables du résultat?