

Une bataille sans bataille

Jean-Paul Delahaye¹

La rubrique «Récréation informatique» propose une petite énigme algorithmique ou sur un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel du problème précédent : *Vide ou pas à l'infini ?*

On dispose d'une urne vide et d'une réserve illimitée de billes. Un peu après 11 heures du matin on place 10 billes dans l'urne. Une demi-heure plus tard (un peu après 11 heures 30), on en retire une. Une fois passé un quart d'heure, on en ajoute 10 nouvelles. On attend 1/8 d'heure et on retire une bille. On attend 1/16 d'heure et on en ajoute 10 nouvelles. On attend 1/32 d'heure et on en retire une. Etc. On imagine ici qu'on est capable d'agir de plus en plus vite sans limitation. À midi toutes les étapes se sont déroulées car $1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n + \dots = 1$. On se demande combien y a-t-il de billes dans l'urne à midi ?

La réponse qui vient immédiatement à l'esprit est qu'il y en a une infinité car on en ajoute beaucoup plus qu'on en retire. Soyons précis. On numérote les instants délimitant nos actions $t_0 = 11$ h, $t_1 = 12$ h $- 1/2$ h, $t_2 = 12$ h $- 1/4$ h, $t_3 = 12$ h $- 1/8$ h, $\dots$, $t_n = 12$ h $- 1/2^n$ h, $\dots$. Le nombre de billes dans l'urne à l'instant t_n est donné par le tableau :

Instant numéro n	0	1	2	3	4	5	6	...	$2k$	$2k+1$	...
Nombre de billes	0	10	9	19	18	28	27	...	$9k$	$9k+10$	...

1. Professeur émérite, université de Lille, laboratoire CRISTAL UMR CNRS 9189.

Il ne fait aucun doute que le nombre de billes présentes dans l'urne tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, c'est-à-dire quand t tend vers midi. Il y a donc une infinité de billes dans l'urne à midi.

Pas si vite, ce n'est pas certain ! Imaginons en effet qu'on numérote les billes de 1 à 10 pour les 10 premières déposées dans l'urne, de 11 à 20 pour les 10 suivantes, etc. Imaginons aussi qu'à chaque fois qu'on retire une bille de l'urne on prenne celle de plus petit numéro parmi celles encore présentes. La bille numéro 1 est donc retirée avant l'instant 2, la bille numéro 2 est retirée avant l'instant 4, la bille numéro 3 est retirée avant l'instant 6, etc. Chaque bille déposée dans l'urne finit par être retirée... et donc à midi, il n'y a aucune bille dans l'urne. C'est en contradiction avec l'autre raisonnement. Nous sommes face à un paradoxe !

Pour départager les deux options, on considère qu'il est plus raisonnable d'imaginer qu'à chaque retrait, on choisit la bille au hasard équitablement parmi les billes présentes. Que se passe-t-il ?

Solution

Merci et bravo à Éric Wegrzynowski qui a parfaitement résolu l'énigme. Commençons par considérer une quelconque des dix premières billes.

- La probabilité qu'elle n'ait pas été retirée à l'instant t_2 est $p_1 = 9/10$ car il y avait 10 billes à l'instant t_1 , et qu'entre t_1 et t_2 , on en a retiré une au hasard.
- La probabilité qu'elle n'ait pas été retirée avant t_4 est $p_2 = (9/10)(18/19)$ car il faut à la fois qu'elle soit restée entre t_1 et t_2 , et entre t_3 et t_4 . Etc.
- La probabilité qu'elle n'ait pas été retirée avant l'instant t_{2n} est :

$$p_n = (9/10)(18/19) \dots (9n/(9n+1)) \quad (1)$$

La probabilité p_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, car

$$1/p_n = (10/9)(19/18) \dots (9n+1)/9n = (1+1/9)(1+1/18) \dots (1+1/9n) \quad (2)$$

En développant : $1/p_n > 1/9 + 1/18 \dots 1/9n = (1+1/2 + \dots + 1/n)/9$. Au numérateur la série harmonique tend vers l'infini ; donc p_n tend vers 0. La probabilité est donc nulle à midi, ce qui signifie que la bille considérée est retirée avant midi.

Le raisonnement s'étend à chacune des billes mises à un moment ou un autre dans l'urne, et donc dans le cas d'un retrait au hasard, à midi il ne reste aucune bille dans l'urne comme lorsqu'on retire la bille de plus petit numéro.

Sur un plan mathématique, il n'y a pas de paradoxe car la première conclusion se base sur l'idée qu'à midi le nombre de billes dans l'urne est la limite du nombre de billes dans l'urne à l'instant t_n , or c'est une conclusion mathématiquement infondée. Expliquons pourquoi.

La limite d'une suite E_n d'ensembles existe si, par définition, la limite supérieure des E_n (les éléments qui sont dans une infinité de E_n) est égale à la limite inférieure des E_n (les éléments qui sont dans tous les E_n à partir d'un certain rang). Or quand la limite des E_n existe, il se peut très bien que le nombre d'éléments de E_n soit n et que la limite des E_n soit vide. C'est le cas en prenant $E_n = \{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$. Sur le plan purement mathématique le premier raisonnement par décompte est donc faux car la limite des cardinaux des E_n n'est pas égale en général au cardinal de la limite des E_n quand cette limite existe.

Sur un plan mathématique tous les cas sont possibles selon la procédure précise d'ajout et de retrait même en respectant {ajout de 10 billes} – {retrait de 1 bille}, alternativement. En effet la limite d'une suite d'ensembles E_n , où E_{n+1} est obtenu en ajoutant dix entiers à E_n quand n est pair et en retirant 1 quand n est impair, peut être n'importe quel sous-ensemble fini ou infini de l'ensemble des entiers (démontrez-le!).

Du côté de la physique la méthode pour se défaire du paradoxe est plus facile : la situation envisagée n'est pas réalisable car il faudrait opérer des mouvements de plus en plus rapides et il faudrait donc à un moment aller plus vite que la lumière... ce qui est impossible d'après la théorie de la relativité. Une autre impossibilité physique provient de ce qu'il n'est pas envisageable d'utiliser une infinité de billes, ou d'avoir à sa disposition une urne pouvant contenir une infinité de billes, ou encore de disposer d'assez d'énergie pour opérer les déplacements des billes en moins d'une heure.

Nouveau problème. Une bataille sans bataille

On dispose d'un jeu de cartes qui en contient n un entier supérieur ou égal à 2. Chaque carte porte un numéro de 1 à n qui détermine sa force. On mélange les cartes, on coupe le paquet en deux sous-paquets qui peuvent être inégaux. On tire à pile ou face l'attribution des paquets. Les joueurs tiennent leur paquet les faces vers le sol (donc sans voir la force des cartes). Chacun pose la carte du dessus de son paquet sur la table en la retournant. La carte la plus forte gagne. Le joueur gagnant range les deux cartes jouées sous son paquet en plaçant la sienne en premier puis celle qu'il vient de prendre. Il place la sienne en premier car elle est la plus forte des deux et qu'il souhaite qu'elle revienne le plus rapidement possible. Il n'y a jamais de bataille (deux cartes de même force) car ici toutes les cartes ont des forces différentes. Si l'un des joueurs n'a plus de cartes, il a perdu. Tout est donc parfaitement déterminé dès que la distribution des cartes est fixée.

La question est : se peut-il qu'une partie soit infinie, c'est-à-dire qu'elle boucle ? Plus précisément, pour quelles valeurs de n et quelles distributions a-t-on une boucle ?



On peut aborder le problème en faisant des programmes (qui vont rechercher des cycles) ou par le raisonnement. Précisons que le problème n'est pas facile et que d'ailleurs, il est aujourd'hui incomplètement résolu.

Envoyez vos réponses à jean-paul.delahaye@univ-lille.fr. Les noms des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.