



Excursion en optimisation multi-objectifs – heuristiques et paysages de recherche

Arnaud Liefoghe¹

Cet article se base sur des travaux réalisés dans le cadre du laboratoire franco-japonais MODÔ. Ils ont été menés en collaboration avec Sébastien Verel (Université du Littoral Côte d'Opale), Bilel Derbel (Université de Lille), Fabio Daolio, Hernán Aguirre et Kiyoshi Tanaka (Shinshu University, Japon).

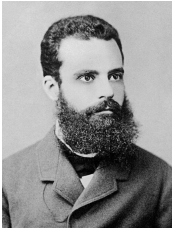
Optimisation multi-objectifs

La résolution d'un problème d'optimisation consiste à identifier la solution de meilleure qualité selon un objectif (ou critère) que l'on cherche à maximiser ou à minimiser. Lorsque l'on souhaite optimiser plusieurs objectifs à la fois, on fait face à un *problème d'optimisation multi-objectifs*. De tels problèmes surviennent dans de nombreuses situations du monde réel, aussi courantes que la recherche du meilleur chemin entre deux emplacements géographiques, où l'on peut par exemple viser à réduire le temps du trajet tout en minimisant son coût. Un décideur s'intéresse alors aux compromis optimaux entre les objectifs, parmi lesquels il pourra sélectionner la solution qui correspond le mieux à ses préférences.

On dit ainsi qu'une solution est dominée par une autre au sens de Pareto² lorsqu'elle est de qualité moindre selon tous les objectifs [30]. Une solution est un *optimum de Pareto* lorsqu'il n'existe aucune autre solution qui la domine. On distingue généralement l'espace des variables, qui sont les leviers sur lesquels le décideur peut agir, de l'image des solutions dans l'espace des objectifs. L'ensemble des solutions

1. Université du Littoral Côte d'Opale, LISIC.

2. Cette relation de dominance est nommée d'après Vilfredo Pareto (1848–1923).



© Wikipédia

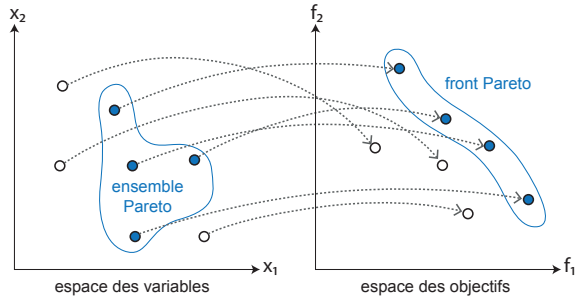


FIGURE 1. Vilfredo Pareto, économiste italien, 1848–1923 (gauche). Ensemble Pareto dans l’espace des variables et front Pareto dans l’espace des objectifs (droite).

Pareto-optimales est connu sous le nom d’*ensemble Pareto*. Leur image dans l’espace des objectifs est le *front Pareto*. Ces notions sont illustrées dans la figure 1.

Malheureusement, l’identification de l’ensemble Pareto n’est pas toujours possible en raison de la complexité ou de la nature « boîte noire » du problème³. De plus, le caractère conflictuel des objectifs impacte sévèrement la quantité de compromis optimaux et donc le nombre, souvent exponentiel, de solutions Pareto-optimales à identifier [10]. Pour ces raisons, le décideur doit généralement se contenter d’un sous-ensemble représentatif ou approché de solutions. Dans ce contexte, il existe des *méthodes calculatoires* approchées qui se basent sur la recherche de solutions de bonne qualité par échantillonnage. Ainsi, depuis les années 90, un grand nombre d’*heuristiques* génériques de *recherche locale* et d’*évolution artificielle* ont été proposées pour l’optimisation multi-objectifs [6, 4, 2]. Ce domaine de l’algorithmique pour l’optimisation et pour la résolution de problèmes se situe à la confluence de la *recherche opérationnelle* et de l’*intelligence artificielle*.

De façon alternative, notons l’existence de méthodes d’approximation avec garantie de performance, où il est supposé que de multiples problèmes auxiliaires mono-objectifs peuvent être résolus en temps polynomial [13].

Heuristiques pour l’optimisation multi-objectifs

Revenons-en aux heuristiques vouées à l’optimisation multi-objectifs. Celles-ci visent à identifier une approximation de l’ensemble Pareto qui sera présentée au décideur pour l’étape de décision. Qu’est-ce qu’une bonne approximation ? Il existe plusieurs façons de mesurer à quelle point celle-ci s’éloigne du front Pareto [39].

3. Un problème est dit « boîte noire » lorsque la méthode de résolution n’a pas accès à l’expression algébrique des objectifs, par exemple lorsque l’évaluation de la qualité d’une solution est le résultat d’une simulation.

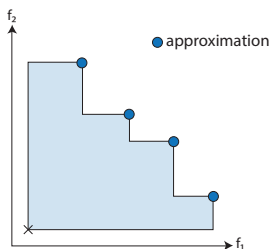


FIGURE 2. Hypervolume couvert par l'ensemble de points d'une approximation du front Pareto pour un problème à deux objectifs.

Par exemple, l'indicateur d'*hypervolume* consiste à mesurer l'espace (aire en 2D, volume en 3D et hypervolume au delà) qu'il y a entre un ensemble de points dans l'espace des objectifs et un point de référence comme l'illustre la figure 2 dans le cas où deux objectifs sont considérés (2D). Plus l'hypervolume est élevé, plus proche est cet ensemble du front Pareto, et donc meilleure est l'approximation.

Le domaine de prédilection des heuristiques est la résolution de problèmes particulièrement difficiles, qui ne peuvent être résolus autrement. Citons, par exemple, certains problèmes multi-objectifs du voyageur de commerce, d'affectation quadratique ou d'ordonnancement, pour lesquels les heuristiques sont les approches les plus efficaces à ce jour [23, 29, 8]. Puisqu'elles s'appuient sur une série de requêtes à une fonction d'évaluation qui renvoie les valeurs objectifs de solutions fournies en entrée, elles présentent également l'avantage de ne nécessiter que peu de connaissance du problème à résoudre. Enfin, les heuristiques de recherche sont des algorithmes *anytime*. Elles ont donc la capacité de renvoyer des solutions valides quelque soit le moment où elles sont interrompues.

Bien que les tout premiers algorithmes évolutionnaires multi-objectifs datent des années 1980 [33], c'est depuis les années 1990 qu'ils ont connu une véritable effervescence [11, 34, 38]. Après de multiples itérations et améliorations qui se poursuivent encore aujourd'hui⁴, ils sont plus largement adoptés par la communauté depuis les années 2000. On peut les distinguer selon trois catégories [4] :

- (1) les *approches par dominance*, où la dominance de Pareto est utilisée pour discriminer les solutions ;
- (2) les *approches par décomposition*, où le problème multi-objectifs initial est décomposé en sous-problèmes mono-objectifs à l'aide d'une fonction d'agrégation ;

4. Citons, entre autres, la conférence internationale bisannuelle EMO (*evolutionary multi-criterion optimization*), ou encore le track thématique EMO (*evolutionary multiobjective optimization*) de la conférence internationale principale en évolution artificielle : GECCO (*genetic and evolutionary computation conference*).

(3) les *approches par indicateur*, où les solutions sont sélectionnées sur la base d'un indicateur de qualité global ensembliste comme l'hypervolume, qui explicite ainsi le but du processus de recherche.

Citons, par exemple, (1) NSGA-II [7] ou PLS [28], (2) MOEA/D [36] et (3) IBEA [37] ou SMS-EMOA [1] comme algorithmes représentatifs de ces catégories. On distingue aussi les algorithmes de recherche locale des algorithmes évolutionnaires. Les premiers explorent le *voisinage* de solutions précédemment identifiées de façon plus déterministe, alors que les seconds utilisent la recombinaison de solutions multiples et des opérateurs de variation plus stochastiques. Ces différentes approches ont toutes des avantages et des inconvénients. Or, il reste difficile de recommander a priori quel algorithme utiliser (et comment le paramétrer) afin de résoudre un problème particulier dans un certain contexte d'optimisation. Il s'agit précisément des questions que nous abordons ci-dessous.

Qu'est-ce qui rend un problème multi-objectifs difficile ?

Dans un souci de mieux comprendre le fondement et le comportement des heuristiques de recherche, l'*analyse de paysage* constitue un concept central [32, 24, 25]. Un paysage mono-objectif à deux variables est illustré dans la figure 3. Le but est ici d'informer sur la structure de l'espace de recherche, du point de vue de l'algorithme. Ainsi, à l'opposé de propriétés structurelles spécifiques au problème, l'analyse de paysage vise à fournir des attributs génériques qui ne dépendent pas d'un problème particulier. Elle vise plutôt à caractériser la topologie de l'espace de recherche au vu des défis auxquels une heuristique doit faire face lorsqu'elle l'aborde. En particulier, le nombre et la distribution des optima locaux, c'est-à-dire des points d'attraction sous-optimaux qui inhibent la progression des heuristiques, s'avèrent cruciaux pour en expliquer les performances [16, 26, 27].

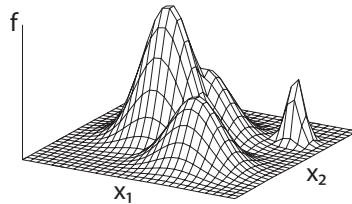


FIGURE 3. Illustration d'un paysage à deux variables (x_1, x_2) et un objectif (f).

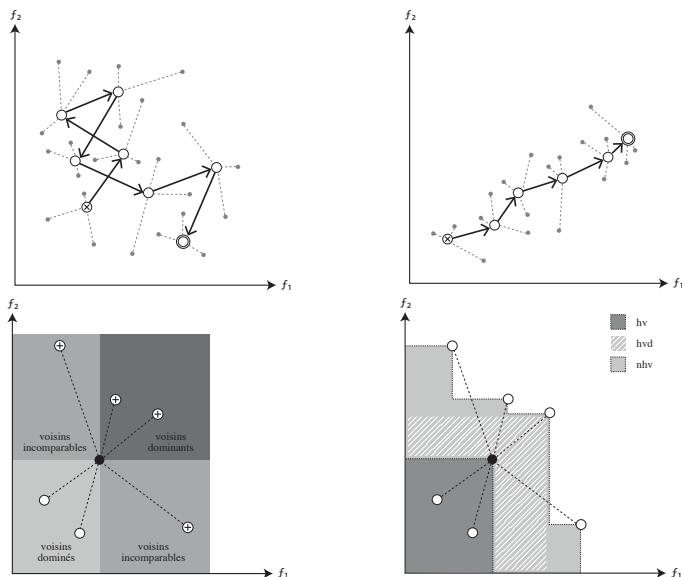


FIGURE 4. Marche aléatoire de longueur $\ell = 7$ (haut gauche), marche adaptative de longueur $\ell = 5$ (haut droit), mesures liées à la dominance (bas gauche) et à l'hypervolume (bas droit) calculées sur l'échantillon de solutions collectées le long d'une marche.

Un paysage multi-objectifs est constitué de l'espace des variables, des objectifs, et d'une relation de voisinage entre les solutions⁵. Dès lors, de multiples mesures statistiques quantifiables visant à caractériser le paysage de problèmes d'optimisation multi-objectifs peuvent être définies. Ces outils analytiques prennent la forme d'*attributs* (ou *features*), qui peuvent être empiriquement liés à la difficulté du problème et à l'efficacité des algorithmes, dans le but de fournir une information importante quant à l'interaction entre la structure du paysage et le comportement des heuristiques et de leurs composants. Ils concernent, par exemple, les solutions Pareto-optimales, ou encore la répartition des solutions dans l'espace des objectifs. Néanmoins, ces attributs « globaux » requièrent une connaissance exhaustive des solutions, ce qui les rend caducs pour les problèmes de grande taille. À l'inverse, des attributs « locaux » peuvent être calculés à partir d'un échantillon de solutions [19]. Dans ce qui suit, nous introduisons deux stratégies d'échantillonnage et différentes mesures calculées sur cet échantillon. Nous considérons un attribut local comme une

5. Par exemple, deux solutions sont considérées comme voisines si la différence entre les deux porte uniquement sur une ou deux variables.

combinaison des deux. Tout d'abord, l'échantillonnage est communément effectué au moyen d'une *marche* sur le paysage [16]. Une marche consiste en une séquence ordonnée de solutions telle que la solution courante est voisine de la précédente. Dans la figure 4 (en haut), le choix de la solution voisine se fait au hasard lors d'une *marche aléatoire* (à gauche), alors qu'un voisin améliorant (qui domine la solution courante) est sélectionné lors d'une *marche adaptative* (à droite). La longueur d'une marche aléatoire est un paramètre : plus la marche est longue, meilleure est l'estimation des attributs. Au contraire, une marche adaptative se poursuit tant qu'une amélioration est possible et prend fin lorsqu'elle tombe dans un optimum local. Plusieurs marches adaptatives sont généralement effectuées dans le but d'améliorer la fiabilité des attributs.

Ainsi, pour chaque solution de la marche, on prélève tout ou partie de son voisinage et on mesure la proportion de voisins dominés, dominants et incomparables, ainsi que la proportion de voisins non-dominés. Nous calculons également l'hypervolume couvert par chaque solution, la différence moyenne avec l'hypervolume de ses voisins, et l'hypervolume couvert par l'ensemble des voisins. Ces mesures sont illustrées dans la figure 4 (en bas). Pour un échantillon collecté au moyen d'une marche aléatoire, nous calculons une moyenne sur toutes les solutions de la marche, ainsi que le premier coefficient d'auto-corrélation⁶. Pour les marches adaptatives, nous calculons simplement les valeurs moyennes, en plus de la longueur de la marche qui s'avère être un bon estimateur du nombre d'optima locaux [35]. La complexité d'une marche en nombre de solutions évaluées est $\Theta(\ell \cdot \eta)$, où ℓ est la longueur de la marche et η est le nombre de voisins explorés par itération [21].

Quel est l'*impact* de ces attributs extraits du paysage, qui sont autant de mesures de difficulté, sur la *performance* des heuristiques ? Pour répondre à cette question, nous considérons deux alternatives pour l'optimisation multi-objectifs, un algorithme évolutionnaire [18] et une recherche locale [28], que nous exécutons sur 1 000 problèmes pseudo-bouliens aux caractéristiques variées selon le nombre de variables et d'objectifs, la non-linéarité des objectifs, et leur degré de corrélation [35]. Pour étudier l'association entre les attributs du paysage et la difficulté empirique du problème, nous construisons un *modèle de régression* qui infère la performance de chaque algorithme en fonction des attributs. Pour cela, nous considérons une méthode d'apprentissage ensembliste basée sur les forêts d'arbres extrêmement aléatoires [12]. L'évaluation de la qualité du modèle par validation croisée rapporte une erreur de prédiction inférieure à 0.5%, avec un coefficient de détermination supérieur à 0.8. Cela signifie que plus de 80% de la variance observée sur la performance des algorithmes peut s'expliquer par les attributs du paysage.

Les modèles d'apprentissage arborescents présentent l'avantage d'identifier les attributs les plus importants en vue d'obtenir une bonne inférence, ce qui donne un

6. La marche est alors vue comme un signal à partir duquel on étudie la dépendance d'une mesure à un temps t par rapport au temps $t' < t$.

aperçu du processus modélisé [22]. Ceci permet de révéler quels attributs impulsent la performance des heuristiques, et de quelle manière, et ainsi appréhender les difficultés auxquelles une heuristique doit faire face en fonction du problème à résoudre. L'importance relative des attributs est donnée dans la figure 5 ; les attributs y sont triés par ordre d'importance. Bien que le niveau d'inférence soit similaire pour les deux algorithmes, les attributs les plus importants diffèrent entre l'algorithme évolutionnaire et la recherche locale. Les plus importants pour l'algorithme évolutionnaire sont liés à la rugosité du paysage (en violet), suivis de l'estimateur du nombre d'optima locaux (`length_aws`).

À l'inverse, pour la recherche locale, les attributs liés à la dominance et à la corrélation entre objectifs (en vert) se montrent plus informatifs. Ceci révèle que les attributs du paysage impactent les heuristiques pour l'optimisation multi-objectifs de façon différente. Se pose alors le défi de sélectionner, a priori, l'heuristique la plus à même de résoudre efficacement un problème inédit.

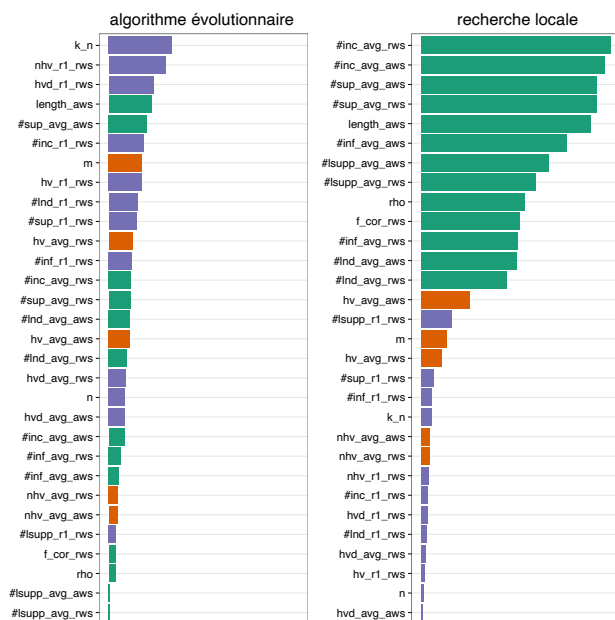


FIGURE 5. Importance relative des attributs pour prédire la performance d'un algorithme évolutionnaire (à gauche) et d'une recherche locale (à droite).

Vers une sélection automatisée d’algorithmes multi-objectifs

Bien que les heuristiques constituent des méthodes de choix pour l’optimisation multi-objectifs, il reste impossible de recommander a priori quel algorithme utiliser parmi la pléthore de méthodes existantes afin de résoudre un problème particulier. Étant donné une collection de problèmes et d’algorithmes, le *problème de sélection d’algorithme*, bien connu de l’intelligence artificielle, consiste à identifier l’algorithme le plus adapté au problème à résoudre (figure 6). Ainsi, les attributs du paysage nous donnent matière à l’automatisation de la tâche fastidieuse de la sélection de l’heuristique la plus à même de résoudre un problème d’optimisation multi-objectifs qui n’aurait pas été rencontré jusque-là. L’apprentissage automatique peut tirer parti des attributs du paysage afin de prédire automatiquement l’heuristique à sélectionner. De nouveau, le défi ici est de concevoir et d’analyser les attributs du paysage, mais cette fois-ci en mettant un accent particulier sur leur efficacité de calcul, afin qu’ils soient utiles pour la sélection automatisée d’algorithmes.

Considérons le même jeu de 1000 problèmes pseudo-booléens étudiés dans la section précédente et un portefeuille de trois heuristiques classiques pour l’optimisation multi-objectifs, à savoir NSGA-II [7], MOEA/D [36] et IBEA [37]. Elles ont été sélectionnés en tant qu’algorithmes représentatifs de l’état de l’art dans le domaine, couvrant respectivement les approches par dominance, par décomposition et par indicateur. Nous nous appuyons sur une implémentation prête à l’emploi, avec paramétrage par défaut, fournie au sein de la librairie `jMetal` [9]. Afin d’inférer quelle heuristique s’avère la plus performante pour résoudre un problème donné, nous construisons un *arbre de classification* de type CART [3]. Les données d’entrée sont les attributs (locaux) du paysage, calculés à partir d’un échantillon de solutions,

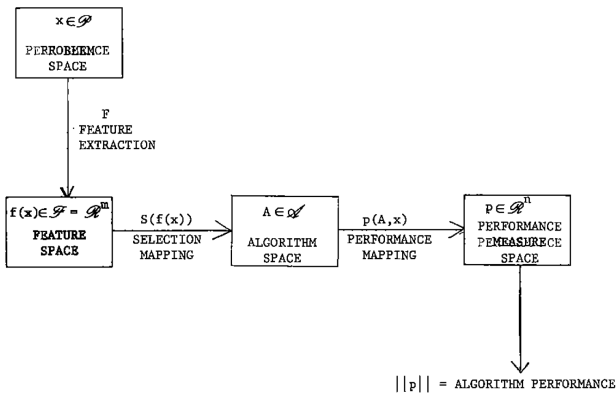


FIGURE 6. Modèle de sélection d’algorithme de [31].

et la classe de sortie indique simplement si NSGA-II, IBEA ou MOEA/D obtient la meilleure performance moyenne sur le problème considéré.

L'arbre de décision obtenu est présenté dans la figure 7. La précision de classification indique un taux d'erreur inférieur à 13%, là où l'utilisation d'un unique algorithme entraînerait plus de 50% d'erreurs. L'attribut qui se trouve à la racine est la proportion moyenne de voisins localement non dominés rencontrés le long d'une marche adaptative (`#lnd_avg_aws`). Lorsqu'il existe peu de solutions non dominées dans le voisinage, NSGA-II a plus de chances d'être sélectionné, puisqu'il surpasse IBEA et MOEA/D sur 469 problèmes. À l'inverse, lorsqu'il y a beaucoup de voisins non dominés, c'est MOEA/D qui se démarque, en étant plus performant sur 308 problèmes parmi 334.

Dans la figure 8, nous utilisons la même méthodologie afin de construire un autre arbre de décision, cette fois-ci pour les problèmes d'affectation quadratique [17]. Ceux-ci se distinguent de la classe de problèmes précédente sous de multiples aspects, notamment la nature des variables et donc la représentation des solutions. Le taux d'erreur est ici de 18%, contre 42% au mieux pour l'utilisation d'un algorithme unique. Les attributs les plus importants, qui apparaissent en haut de l'arbre, concernent le nombre d'objectifs (`m`), la longueur moyenne d'une marche adaptative (`length_aws`) et donc le nombre d'optima locaux, ainsi que l'auto-corrélation du nombre de voisins non dominés rencontrés le long d'une marche aléatoire (`lnd_r1_rws`).

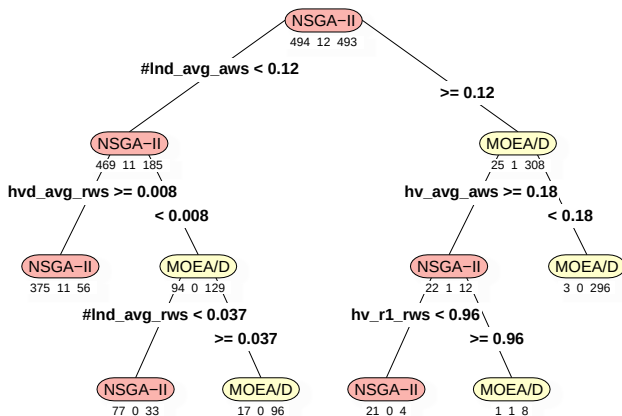


FIGURE 7. Arbre de décision pour la sélection automatisée d'algorithmes pour les problèmes pseudo-bouéliens. Sous les nœuds apparaissent le nombre de problèmes où l'algorithme NSGA-II, IBEA et MOEA/D est le plus efficace, respectivement.

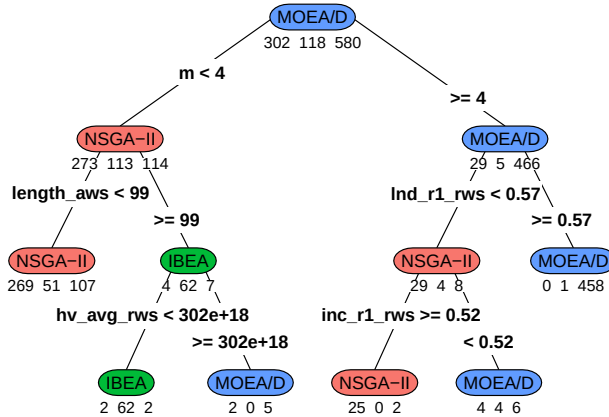


FIGURE 8. Arbre de décision pour la sélection automatisée d’algorithmes pour les problèmes d’affectation quadratique. Sous les nœuds apparaissent le nombre de problèmes où l’algorithme NSGA-II, IBEA et MOEA/D est le plus efficace, respectivement.

De tels arbres de décision permettent d’expliciter *pourquoi un algorithme est recommandé en fonction des valeurs des attributs du paysage*. Descendre plus profondément dans l’arbre permet d’en améliorer la précision de classification. Cela souligne qu’un seul attribut ne suffit généralement pas à distinguer les algorithmes les uns des autres. Plusieurs attributs, qu’ils soient liés aux optima locaux, à la rugosité ou à la corrélation entre objectifs, sont nécessaires pour fournir une recommandation précise. Ce modèle simple illustre le potentiel des attributs du paysage pour l’explication et la sélection automatisée d’heuristiques pour l’optimisation multi-objectifs.

Conclusion

Dans cet article, nous nous sommes intéressés aux heuristiques de recherche pour l’optimisation multi-objectifs. Nous avons exploré le potentiel de l’analyse de paysage pour en expliquer et prédire les performances, et pour fournir une recommandation quant à l’approche qui serait la plus à même de résoudre un problème qui n’aurait pas été rencontré jusque là. Par leur nature locale, des attributs caractérisant le paysage s’avèrent abordables pour des problèmes de dimension pratique et, pour certains, se montrent capables de capturer des informations pertinentes quant la difficulté du problème. Ainsi, le nombre d’objectifs et leur degré de conflit sont cruciaux, tout autant que les *optima locaux* et la *rugosité* qui sont pourtant souvent négligés dans la littérature. Enfin, différents scénarios de sélection automatisée d’algorithmes nous ont permis de souligner qu’en exploitant ces caractéristiques, il est possible de

recommander efficacement l’heuristique la plus appropriée pour de nouveaux problèmes.

Bien que les attributs du paysage présentés ici aient été conçus avec leur *interprétabilité* à l’esprit, un effort reste à fournir auprès de la communauté afin d’en expliquer pleinement les contours. Une bibliothèque d’analyse de paysages multi-objectifs favoriserait ainsi leur adoption, tout comme des techniques de visualisation qui en amélioreraient l’interprétation. Par ailleurs, les attributs existants mériteraient certainement d’être complétés par des mesures explorant d’autres facettes de difficulté, en particulier lorsque les objectifs sont *hétérogènes* [5]. Quant aux techniques de prédiction qui les exploitent, elles gagneraient à prendre en compte le *compromis* entre le temps d’exécution et la qualité d’approximation obtenue, qui n’est souvent connu qu’au moment de la sélection de l’algorithme [14]. Par ailleurs, les heuristiques considérées pour la sélection d’algorithme possèdent des paramètres qui ont été occultés lors de notre analyse. Tout comme le meilleur algorithme dépend du problème et du contexte d’optimisation, sa meilleure configuration l’est tout autant. Ainsi, les techniques automatisées de *configuration* d’algorithmes peuvent également bénéficier des attributs du paysage en vue de construire un ensemble de configurations et ainsi traiter de problèmes hétérogènes [15, 20].

Enfin, étendre et étudier la méthodologie de prédiction et de sélection automatisée d’algorithmes basée sur le paysage en considérant des *scénarios plus pratiques* et des problèmes hors du monde académique nous permettrait d’en améliorer notre compréhension. Plus généralement, nous pensons que les attributs du paysage sont des outils précieux pour constituer un portefeuille d’algorithmes et en automatiser la sélection. Ils ont également le potentiel de fournir un aperçu des relations entre les problèmes et les algorithmes, et d’aider à identifier les classes de problèmes pour lesquels des approches efficaces font encore défaut, et où les algorithmes nécessitent une amélioration.

Références

- [1] N. Beume, B. Naujoks, and M. Emmerich. SMS-EMOA : Multiobjective selection based on dominated hypervolume. *European Journal of Operational Research*, 181(3) :1653–1669, 2007.
- [2] J. Branke, K. Deb, K. Miettinen, and R. Slowinski, editors. *Multiobjective optimization – Interactive and evolutionary approaches*, volume 5252 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2008.
- [3] Leo Breiman, Jerome H Friedman, Richard A Olshen, and Charles J Stone. *Classification and regression trees*. Wadsworth & Brooks, 1984.
- [4] C. A. Coello Coello, G. B. Lamont, and D. A. Van Veldhuizen. *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. Springer, second edition, 2007.
- [5] Raphaël Cosson, Roberto Santana, Arnaud Liefvooghe, and Bilel Derbel. Multi-objective NK landscapes with heterogeneous objectives. In *Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO 2022)*, pages 502–510, Boston, MA, USA, 2022. ACM.

- [6] K. Deb. *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. John Wiley & Sons, 2001.
- [7] Kalyanmoy D. Deb, Amrit Pratap, Sameer Agarwal, and T. Meyarivan. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm : NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2) :182–197, 2002.
- [8] Jérémie Dubois-Lacoste, Manuel López-Ibáñez, and Thomas Stützle. A hybrid TP+PLS algorithm for bi-objective flow-shop scheduling problems. *Computers & Operations Research*, 38(8) :1219–1236, 2011.
- [9] Juan J. Durillo and Antonio J. Nebro. jmetal : A java framework for multi-objective optimization. *Advances in Engineering Software*, 42 :760–771, 2011.
- [10] M. Ehrgott. *Multicriteria optimization*. Springer, second edition, 2005.
- [11] C. M. Fonseca and P. J. Fleming. Genetic algorithms for multiobjective optimization : Formulation, discussion and generalization. In *Fifth International Conference on Genetic Algorithms (ICGA 1993)*, pages 416–423, Urbana-Champaign, IL, USA, 1993. Morgan Kaufmann.
- [12] Pierre Geurts, Damien Ernst, and Louis Wehenkel. Extremely randomized trees. *Machine Learning*, 63(1) :3–42, 2006.
- [13] Arne Herzel, Stefan Ruzika, and Clemens Thielen. Approximation methods for multiobjective optimization problems : A survey. *INFORMS Journal on Computing*, 33(4) :1284–1299, 2021.
- [14] Alexandre D. Jesus, Arnaud Lief ooghe, Bilel Derbel, and Luís Paquete. Algorithm selection of any-time algorithms. In *Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO 2020)*, pages 850–858, Cancún, Mexico, 2020. ACM.
- [15] Serdar Kadioglu, Yuri Malitsky, Meinolf Sellmann, and Kevin Tierney. ISAC – instance-specific algorithm configuration. In *19th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI 2010)*, volume 215 of *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*, pages 751–756, Lisbon, Portugal, 2010. IOS Press.
- [16] S. A. Kauffman. *The origins of order*. Oxford University Press, 1993.
- [17] Joshua Knowles and David Corne. Instance generators and test suites for the multiobjective quadratic assignment problem. In *Evolutionary Multi-Criterion Optimization (EMO 2003)*, volume 2632 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 295–310, Faro, Portugal, 2003. Springer.
- [18] Marco Laumanns, Lothar Thiele, and Eckart Zitzler. Running time analysis of evolutionary algorithms on a simplified multiobjective knapsack problem. *Natural Computing*, 3(1) :37–51, 2004.
- [19] A. Lief ooghe, F. Daolio, S. Verel, B. Derbel, H. Aguirre, and K. Tanaka. Landscape-aware performance prediction for evolutionary multi-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 24(6) :1063–1077, 2020.
- [20] Arnaud Lief ooghe, Bilel Derbel, Sébastien Verel, Hernán Aguirre, and Kiyoshi Tanaka. Towards landscape-aware automatic algorithm configuration : Preliminary experiments on neutral and rugged landscapes. In *17th European Conference on Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization (EvoCOP 2017)*, volume 10197 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 215–232, Amsterdam, The Netherlands, 2017. Springer.
- [21] Arnaud Lief ooghe, Sébastien Verel, Bilel Derbel, Hernan Aguirre, and Kiyoshi Tanaka. Dominance, indicator and decomposition based search for multi-objective QAP : Landscape analysis and automated algorithm selection. In *Parallel Problem Solving from Nature (PPSN XVI)*, volume 12269 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 33–47, Leiden, The Netherlands, 2020. Springer.
- [22] Gilles Louppe, Louis Wehenkel, Antonio Sutera, and Pierre Geurts. Understanding variable importances in forests of randomized trees. In *Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS 2013)*, volume 26, pages 431–439. Curran Associates, Inc., 2013.

- [23] Thibaut Lust and Jacques Teghem. The multiobjective traveling salesman problem : A survey and a new approach. In *Advances in Multi-Objective Nature Inspired Computing*, pages 119–141. Springer, 2010.
- [24] Katherine M. Malan. A survey of advances in landscape analysis for optimisation. *Algorithms*, 14(2) :40, 2021.
- [25] Katherine M. Malan and Gabriela Ochoa. Landscape analysis of optimization problems and algorithms. In *Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion (GECCO 2023)*, pages 1416–1432, Lisbon, Portugal, 2023. ACM.
- [26] Peter Merz. Advanced fitness landscape analysis and the performance of memetic algorithms. *Evolutionary Computation*, 12(3) :303–325, 2004.
- [27] Gabriela Ochoa, Sébastien Verel, Fabio Daolio, and Marco Tomassini. Local optima networks : A new model of combinatorial fitness landscapes. In *Recent Advances in the Theory and Application of Fitness Landscapes*, pages 233–262. Springer, 2014.
- [28] Luis Paquete, Tommaso Schiavinotto, and Thomas Stützle. On local optima in multiobjective combinatorial optimization problems. *Annals of Operations Research*, 156(1) :83–97, 2007.
- [29] Luís Paquete and Thomas Stützle. A study of stochastic local search algorithms for the biobjective QAP with correlated flow matrices. *European Journal of Operational Research*, 169(3) :943–959, 2006.
- [30] V. Pareto. *Cours d'économie politique*, volume 1–2. Rouge, Lausanne, Switzerland, 1896.
- [31] John R. Rice. The algorithm selection problem. *Advances in Computers*, 15 :65–118, 1976.
- [32] Hendrik Richter and Andries P. Engelbrecht, editors. *Recent advances in the theory and application of fitness landscapes*. Emergence, Complexity and Computation. Springer, 2014.
- [33] J. D. Schaffer. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms. In *First International Conference on Genetic Algorithms (ICGA 1985)*, pages 93–100, Pittsburgh, PA, USA, 1985. Lawrence Erlbaum Associates.
- [34] N. Srinivas and K. Deb. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. *Evolutionary Computation*, 2(3) :221–248, 1994.
- [35] Sébastien Verel, Arnaud Liefvooghe, Laetitia Jourdan, and Clarisse Dhaenens. On the structure of multiobjective combinatorial search space : MNK-landscapes with correlated objectives. *European Journal of Operational Research*, 227(2) :331–342, 2013.
- [36] Qingfu Zhang and Hui Li. MOEA/D : A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 11(6) :712–731, 2007.
- [37] E. Zitzler and S. Künzli. Indicator-based selection in multiobjective search. In *Conference on Parallel Problem Solving from Nature (PPSN VIII)*, volume 3242 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 832–842, Birmingham, UK, 2004. Springer.
- [38] E. Zitzler and L. Thiele. Multiobjective evolutionary algorithms : A comparative case study and the strength Pareto approach. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 3(4) :257–271, 1999.
- [39] E. Zitzler, L. Thiele, M. Laumanns, C. M. Fonseca, and V. Grunert da Fonseca. Performance assessment of multiobjective optimizers : An analysis and review. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 7(2) :117–132, 2003.