



Vide ou pas à l'infini ?

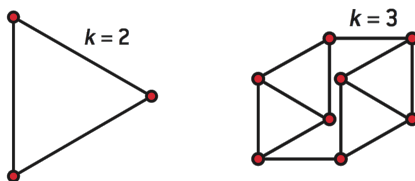
Jean-Paul Delahaye¹

La rubrique « Récréation informatique » propose une petite énigme algorithmique ou sur un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel et solution du problème précédent

UN TEL GRAPHE EST-IL VRAIMENT POSSIBLE ?

Un triangle équilatéral peut être vu comme un graphe planaire (un graphe qui peut se dessiner sur un plan sans que deux arêtes se croisent) dont chaque sommet est lié à *deux* autres exactement ($k = 2$), et dont toutes les arêtes ont la même longueur. On peut de même construire un graphe planaire, dont chaque sommet est lié à *trois* autres exactement ($k = 3$), et dont toutes les arêtes ont la même longueur. Ci dessous, un exemple pour $k = 3$ avec un nombre aussi petit que possible de sommets.



1. Professeur émérite, université de Lille, campus scientifique, CRISTAL UMR CNRS, 9189 Centre de recherche en informatique signal et automatique de Lille, bâtiment ESPRIT, 59655, Villeneuve d'Ascq Cedex France. E-mail : jean-paul.delahaye@univ-lille.fr.

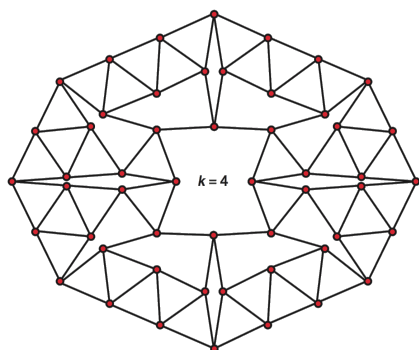
Si vous essayez de construire un graphe planaire, dont chaque sommet est lié à quatre autres exactement, et dont toutes les arêtes ont la même longueur vous allez sans doute croire rapidement que ce n'est pas possible. Pourtant si, c'est possible, cherchez bien ! en considérant que, comme dans les exemples, les arêtes doivent être rectilignes et que les graphes recherchés doivent être finis.

Et qu'en est-il pour *cinq*, puis *six*, puis ... ?

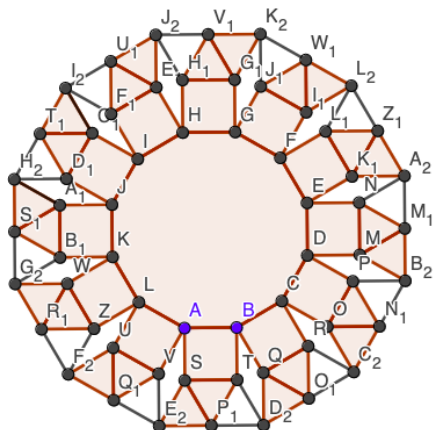
SOLUTION.

Merci à Jean-Jacques Pansiot de l'université de Strasbourg qui m'a fait parvenir une solution avec un graphe à 60 sommets.

Le graphe de Harborth ² (ci-dessous) est un graphe planaire dont chaque sommet est lié à quatre autres exactement, et dont tous les arcs ont la même longueur. Il comporte 104 arêtes et 52 sommets. Ce graphe a été présenté pour la première fois par H. Harborth en 1986 [1]. Sa minimalité n'est pas prouvée. On sait qu'il n'existe pas de tels graphes si on en remplace quatre par cinq, par six...



graphe de Harborth



graphe de J.J. Pansiot

Nouveau problème

VIDE OU PAS À L'INFINI ?

On dispose d'une urne vide et d'une réserve illimitée de billes. Un peu après 11 heures du matin on place 10 billes dans l'urne. Une demi-heure plus tard (un peu après 11 heure 30), on en retire une. Une fois passé un quart d'heure, on en ajoute 10 nouvelles. On attend $\frac{1}{8}$ d'heure et on retire une bille. On attend $\frac{1}{16}$ d'heure et on en ajoute 10 nouvelles. On attend $\frac{1}{32}$ d'heure et on en retire une, etc... On imagine ici qu'on est capable d'agir de plus en plus vite sans limitation.

2. https://fr.wikipedia.org/wiki/Graphe_de_Harborth.

À midi toutes les étapes se sont déroulées car $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$. On se demande combien y a-t-il de billes dans l'urne à midi ?

La réponse qui vient immédiatement à l'esprit est qu'il y en a une infinité car on en ajoute beaucoup plus qu'on en retire. Soyons précis. On numérote les instants délimitant nos actions $t_0 = 11\text{h}$, $t_1 = 12\text{h} - \frac{1}{2}\text{h}$, $t_2 = 12\text{h} - \frac{1}{4}\text{h}$, $t_3 = 12\text{h} - \frac{1}{8}\text{h}$, ..., $t_n = 12\text{h} - \frac{1}{2^n}\text{h}$.

Le nombre de billes dans l'urne à l'instant t_n est donné par le tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6	...	2k	2k+1	...
Nombre de billes	0	10	9	19	18	28	27	...	9k	9k+10	...

Il ne fait aucun doute que le nombre de billes présentes dans l'urne tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, c'est-à-dire quand t tend vers midi. Il y a donc une infinité de billes dans l'urne à midi.

Pas si vite, ce n'est pas certain ! Imaginons en effet qu'on numérote les billes de 1 à 10 pour les 10 premières déposées dans l'urne, de 11 à 20 pour les 10 suivantes, etc. Imaginons aussi qu'à chaque fois qu'on retire une bille de l'urne on prenne celle de plus petit numéro parmi celles encore présentes. La bille numéro 1 est donc retirée avant l'instant 2, la bille numéro 2 est retirée avant l'instant 4, la bille numéro 3 est retirée avant l'instant 6, etc. Chaque bille déposée dans l'urne finit par être retirée... et donc à midi, il n'y a aucune bille dans l'urne. C'est en contradiction avec l'autre raisonnement. Nous sommes face à un paradoxe !



SUIS-JE
MORT DANS
L'URNE PLEINE,
OU VIVANT DANS
L'URNE VIDE ??

Pour départager les deux options, on considère qu'il est plus raisonnable d'imaginer qu'à chaque retrait, on choisit la bille au hasard équitablement parmi les billes présentes. Que se passe-t-il ?

Envoyez vos réponses à jean-paul.delahaye@univ-lille.fr. Les noms des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.

Références

- [1] Heiko Harborth. Match sticks in the plane. *The Lighter Side of Mathematics*, 1994. The Lighter Side of Mathematics : Proceedings of the Eugène Strens Memorial Conference of Recreational Mathematics and its History, Calgary, Canada, 1986, Washington, D.C.