



Un tel graphe est-il vraiment possible ?

Jean-Paul Delahaye¹

La rubrique « Récréation informatique » propose une petite énigme algorithmique ou sur un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel et solution du problème précédent

L'IMPOSSIBLE SURVEILLANCE GÉNÉRALE

Les citoyens d'un régime totalitaire doivent se surveiller mutuellement. On suppose que la distance entre deux citoyens n'est jamais la même, ce qui est une situation probable si on mesure les distances avec une grande précision. Le dictateur veut que chaque citoyen soit surveillé par au moins un autre. Parce que c'est plus efficace et simple à mettre en place, chaque citoyen surveille le citoyen le plus proche de lui. Il y a un nombre impair de citoyens.

Montrez qu'un citoyen au moins n'est surveillé par personne... et peut donc engager la lutte contre le dictateur sans être pris.

SOLUTION.

Bravo à Li Junkang et Gislain Uhl qui m'ont fait parvenir la bonne solution.

Considérons les deux citoyens les plus rapprochés l'un de l'autre : leur distance est plus petite que n'importe quelle autre distance entre deux citoyens. Nécessairement, ils se regardent l'un l'autre. Si un autre citoyen regarde l'un d'eux, alors l'un

1. Professeur émérite, université de Lille, campus scientifique, CRISTAL UMR CNRS, 9189 Centre de recherche en informatique signal et automatique de Lille, bâtiment ESPRIT, 59655, Villeneuve d'Ascq Cedex France. E-mail : jean-paul.delahaye@univ-lille.fr.

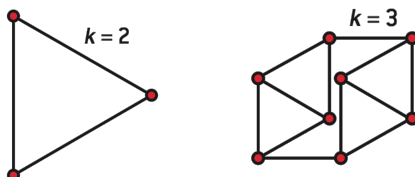
des citoyens sera regardé deux fois et donc il y aura, ailleurs, un citoyen que personne ne regarde. Si personne ne regarde ces deux citoyens, alors on peut les enlever du problème, car les autres citoyens vérifient les mêmes hypothèses : ils sont en nombre impair, se regardent entre eux et chacun regarde celui qui est le plus près de lui. De proche en proche, on en arrive à trois citoyens, et là, celui qui n'est pas parmi les deux les plus rapprochés n'est évidemment regardé par personne.

Le fait que le nombre de citoyens soit impair est essentiel, et l'on montre sans difficulté que si N est un nombre pair, alors on peut placer N citoyens de telle façon que (a) chacun regarde celui qui est le plus proche, et (b) chaque citoyen est regardé par un autre. Ce problème provient d'une compétition mathématique organisée en 1966 à Voronezh, dans l'ancienne Union soviétique.

Nouveau problème

UN TEL GRAPHE EST-IL VRAIMENT POSSIBLE ?

Un triangle équilatéral peut être vu comme un graphe planaire (un graphe qui peut se dessiner sur un plan sans que deux arêtes se croisent) dont chaque sommet est lié à *deux* autres exactement ($k = 2$), et dont toutes les arêtes ont la même longueur. On peut de même construire un graphe planaire, dont chaque sommet est lié à *trois* autres exactement ($k = 3$), et dont toutes les arêtes ont la même longueur. Ci dessous, un exemple pour $k = 3$ avec un nombre aussi petit que possible de sommets.



Si vous essayez de construire un graphe planaire, dont chaque sommet est lié à *quatre* autres exactement, et dont toutes les arêtes ont la même longueur vous allez sans doute croire rapidement que ce n'est pas possible. Pourtant si, c'est possible, cherchez bien ! en considérant que, comme dans les exemples, les arêtes doivent être rectilignes et que les graphes recherchés doivent être finis.

Et qu'en est-il pour *cinq*, puis *six*, puis ... ?

Envoyez vos réponses à jean-paul.delahaye@univ-lille.fr. Les noms des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.