



Géométrie discrète

Jean-Marc Chassery et Isabelle Sivignon¹

Le 11 avril 2021, le comité de rédaction contacte Jean-Marc Chassery pour lui proposer la rédaction d'une « petite histoire de la géométrie discrète ». Après quelques échanges téléphoniques, Jean-Marc accepte la proposition avec enthousiasme. Une année se passe néanmoins avant qu'il trouve le temps de mettre en œuvre ce travail de rédaction, qu'il choisit de réaliser avec l'assistance d'Isabelle Sivignon. Une première ébauche est produite en février 2023, et quelques requêtes de révisions lui sont transmises en mai. Jean-Marc est alors en voyage au Canada, et a prévu de finaliser l'article à son retour de voyage, mi-juin. Il décède le 17 juin, en rentrant en France, nous laissant une version presque finale mais néanmoins inachevée de son texte. Isabelle a accepté de prendre en charge les derniers détails qui restaient à ajuster sur ce texte. Elle a choisi d'altérer le moins possible la dernière version de la main de Jean-Marc. Nous vous livrons ainsi, dans les pages qui suivent, ce qui restera comme le dernier article de Jean-Marc. Un article qui, au delà de sa valeur didactique, revêt désormais pour nous tous une valeur mémorielle.

Historique et positionnement

La photographie et l'imagerie ont connu une révolution technologique entre les années 70, avec l'invention du capteur CCD et les premières images numériques, et les années 90 avec les premiers appareils destinés au grand public. De part la multitude d'appareils d'acquisition ou de supports maintenant disponibles pour le grand public, depuis les écrans TV jusqu'aux *smartphones*, ces images sont désormais omniprésentes.

1. Laboratoire Gipsa-lab.

Leur développement a suscité dans les années 70 et 80 l'essor de nombreux travaux de recherche en traitement des images, et plus largement en traitement de l'information, du signal, des vidéos. Ces travaux avaient pour objectif de se munir d'outils pour modéliser, décrire, interpréter le contenu des images.

Il est alors apparu nécessaire de développer des outils géométriques adaptés à la structure discrète de ces images composées de pixels. Cette géométrie, cousine de la géométrie euclidienne, est appelée *géométrie discrète*, par opposition au continu, ou encore géométrie digitale en référence au numérique. Les concepts et algorithmes développés permettent alors d'analyser le contenu des images et vidéos ainsi que d'aborder la reconnaissance de formes. Ce texte se veut être un bref panorama de la géométrie discrète, mais le lecteur intéressé peut se reporter à différents ouvrages en français ou en anglais pour aller plus loin [7, 19].

Une telle démarche est à rapprocher du lien entre traitement du signal analogique et traitement du signal numérique. Par ailleurs, aux côtés de la géométrie discrète il faut également citer les travaux en géométrie algorithmique et morphologie mathématique.

Un point de départ pour aborder la géométrie discrète concerne la notion de grille ou de maillage décomposant l'espace continu en pavés ou tesselles. À chaque pavé on associe un élément représentatif appelé pixel en 2D ou voxel en 3D. Le pavage est dit régulier au sens où les pavés sont des polygones ou polyèdres réguliers, adjacents par sommets et dont les côtés forment un maillage également régulier. Cette notion d'adjacence est associée au concept de réseau. Pour de plus amples détails sur les pavages, qu'ils soient réguliers, semi-réguliers voire non uniformes, le lecteur se reportera à l'ouvrage « *Tilings and Patterns* » de Grunbaum [12]. Dans le cadre de pavages réguliers, on obtient uniquement des pavés carrés, triangulaires ou hexagonaux si on se restreint au plan. Pour l'espace tri-dimensionnel on se limitera à des pavés cubiques.

À partir d'un pavage, on peut obtenir une représentation duale sous forme d'un maillage, en définissant un sommet pour chaque pavé et des arêtes représentant l'adjacence entre pavés. Ainsi, à un pavage carré on associe un maillage carré, à un pavage triangulaire on associe un maillage hexagonal et à un pavage hexagonal on associe un maillage triangulaire (cf. figure 1).

La définition de concepts géométriques courants nécessite une attention particulière sur ces supports discrétisés que sont les maillages réguliers en correspondance avec $\mathbb{Z}^2$ si on se rapporte au plan ou à $\mathbb{Z}^3$ pour les surfaces ou volumes, d'où le vocable de « géométrie discrète ». Si le système d'adressage est aisé en maillage carré, il n'en demeure pas moins concevable pour les maillages triangulaires ou hexagonaux sur $\mathbb{Z}^2$. La définition de tels concepts doit prendre en compte la notion de compatibilité avec la géométrie euclidienne. Plus précisément si le pas d'échantillonnage (ou pas de discrétisation) de la maille tend vers 0, l'entité géométrie discrète doit

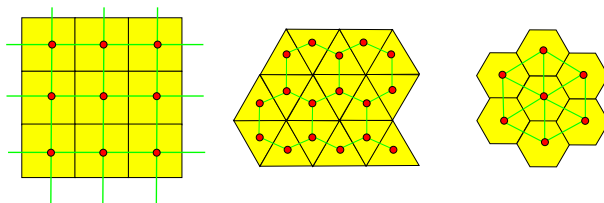


FIGURE 1. Pavages réguliers et maillages associés par dualité.

se confondre à la limite avec l'entité géométrie euclidienne au sens d'une convergence asymptotique. Ceci se retrouve également dans l'introduction de descripteurs de type longueur, courbure, périmètre, mesures surfaciques ou volumiques. Le souci est d'avoir une géométrie adaptée en termes de consistance avec la convergence asymptotique précédemment citée. Cette notion de consistance sera évoquée avec le théorème de Jordan stipulant qu'une courbe fermée s'identifie à la frontière d'un objet séparant son intérieur de son extérieur.

Se limitant à manipuler des données entières, de nombreux travaux en géométrie ont bénéficié de développements en arithmétique entière, notamment les équations diophantiennes à la source de la caractérisation d'une droite discrète ou d'un plan. On citera également par la suite, les recherches sur la conception de distances discrètes et de transformations affines. De même si on s'intéresse à la manipulation de formes, on est amené à transcrire du domaine continu au domaine discret les notions de contours, d'intérieur, d'extérieur, de surface, de cavité pour ne citer qu'elles. Elles font toutes référence à un support topologique avec la notion de voisinage, de chemin consécutif, héritage de la connexité. Ceci est à rapprocher des travaux sur les transformations topologiques de type amincissement, notion de base de la morphologie mathématique. Parmi les opérateurs issus de la morphologie mathématique et utilisés en géométrie discrète, on peut citer la somme de Minkowski entre X et B (appelée dilatation de X par B) définie par $X \oplus B = \{x + b \mid x \in X, b \in B\}$.

Ainsi la géométrie discrète, si elle développe des notions qui lui sont spécifiques, n'en demeure pas moins en étroite relation avec l'arithmétique, la combinatoire, la topologie et l'analyse de formes.

Structures d'animation

Dès la fin des années 80, la géométrie discrète est arrivée à un niveau de théorisation pour lequel une communauté s'est rassemblée avec un soutien du journal *Theoretical Computer Science* grâce à Maurice Nivat et la mise en place du colloque DGCi (*Digital Geometry for Computer Imagery*) dont les actes paraissent dans les

Lecture Notes in Computer Science chez Springer depuis 1996². Les éditions de ce colloque alternent entre la France, les pays européens et le Canada. Au travers des GDR Informatique mathématique (IM) et Informatique géométrique et graphique, réalité virtuelle et visualisation (IG-RV), un groupe de travail commun s'est constitué (intitulé GDMM) ainsi que le comité technique TC18, en 2008, relevant de l'IAPR (*International Association for Pattern Recognition*). Ce comité fédère également la communauté des chercheurs en morphologie mathématique qui dispose d'un colloque régulier sous le terme de ISMM (*International Symposium on Mathematical Morphology*). À ce jour, DGCI et ISMM offrent un colloque conjoint intitulé DGMM dont la première édition a eu lieu à Uppsala (Suède) en 2021 et la seconde en 2022 à Strasbourg (France).

Sur le plan du développement algorithmique, la bibliothèque ouverte Dgtal [1] rassemble un grand nombre d'algorithmes à l'instar de la bibliothèque CGal [29] en géométrie algorithmique.

Fondements

Le processus de discrétisation consiste à créer une forme discrète à partir d'une forme continue notée F délimitée par sa frontière, validant la propriété de Jordan c'est-à-dire avec un intérieur et un extérieur. Parmi les différents processus de discrétisation on retiendra celui affecté à Gauss consistant à retenir pour la forme discrète les points de coordonnées entières contenus dans F . Plusieurs questions viennent à l'esprit : dans un espace discret comment naviguer, comment mesurer, comment caractériser les notions usuelles de la géométrie euclidienne ? Quelle relation établir avec l'espace continu pour lequel on identifie les notions de topologie pour naviguer, les notions de distance pour mesurer des longueurs, des notions d'objets ou formes délimités par une frontière ? L'intérêt de ce processus de discrétisation porte sur la propriété de convergence asymptotique. Par exemple, pour ne citer qu'elle, l'estimation de la surface de l'objet discrétisé converge-t-elle vers celle de l'objet continu lorsque le pas de discrétisation tend vers 0 ? Une illustration de cette problématique d'estimateurs remonte au théorème de Pick dès 1899 qui met en relation points intérieurs et points frontières pour calculer la surface d'un ensemble connexe de pixels (cf. figure 2).

De manière générale, étant donnée une courbe de Jordan, il est connu depuis Gauss que compter le nombre de points contenus à l'intérieur de la courbe permet d'obtenir facilement un estimateur convergent de l'aire de la surface délimitée par la courbe : quand la taille h de la grille diminue, le nombre de points intérieurs I augmente et la valeur hI tend vers l'aire de la surface délimitée par la courbe. Ce

2. *Discrete Geometry for Computer Imagery*, Collection *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Publisher, volumes 1176, 1347, 1568, 1953, 2301, 2886, 3429, 4245, 4992, 5810, 6607, 7749, 8668, 9647, 10502, 11414.

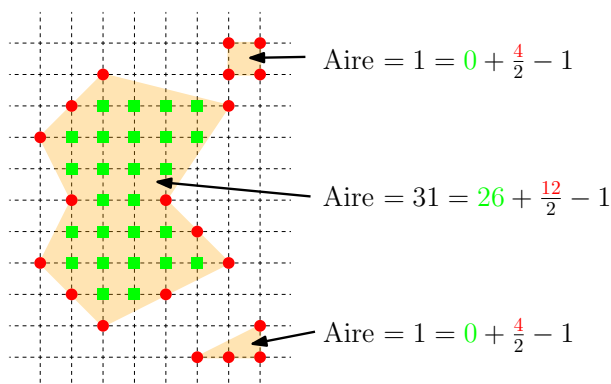


FIGURE 2. Illustration du théorème de Pick en 2D.

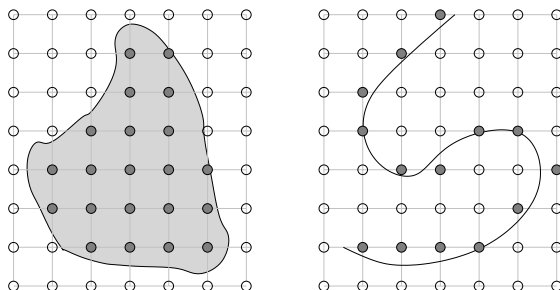


FIGURE 3. Processus de discrétisation d'une forme et d'une courbe.

schéma de discrétisation de Gauss ne s'applique pas à toutes les formes notamment celles non pourvues d'un intérieur dans l'espace continu. C'est le cas des courbes ou plus simplement des droites. On parle de discrétisation basée sur le maillage, qui approxime la courbe analogique selon la règle : chaque fois que la courbe intersecte une arête du maillage on retient le pixel le plus proche de l'intersection. C'est une façon de faire parmi d'autres (cf. figure 3).

On obtient ainsi un ensemble de points discrets. Cependant de nombreux travaux ont porté sur la définition intrinsèque de la droite discrète au sens où celle-ci sera un objet géométrique qui validera les propriétés caractéristiques de la droite euclidienne (plus court chemin entre deux points, orthogonalité, parallélisme, intersection). Cependant, contrairement au calcul de l'aire, compter simplement le nombre de points du discrétisé d'une courbe n'est pas un estimateur convergent de la longueur de la courbe. De manière plus générale, il a été montré que tout estimateur

basé sur une pondération de motifs de longueurs fixées n'est pas convergent asymptotiquement [28].

Topologie

Dès l'instant où l'image est représentée sur un support discret dont les coordonnées sont à valeurs entières, on est confronté à la notion de consécutivité entre points voisins. Compte tenu de l'usage d'un pavage carré, chaque pixel est associé à un pavé et on perçoit aisément la présence de pixels voisins par coté ou par sommet du pavé. On parle des voisinages V_1 et V_∞ composés respectivement de 4 et 8 pixels voisins. Cette notion s'étend en dimension trois à des voisinages composés de 6, 18 et 26 voxels voisins (cf. figure 4).

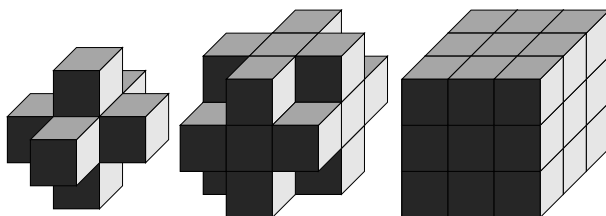


FIGURE 4. Différents voisinage du cube central, 6-voisinage, 18-voisinage et 26-voisinage.

La notion de voisinage, intrinsèquement liée à la notion d'espace topologique, permet de définir des chemins et des composantes connexes de pixels [5, 3, 20, 16].

On introduit la notion d'objet dans une image binaire comme un ensemble connexe maximal de points à valeur 1. Les points à valeur 0 forment le fond. Propageant la notion de voisinage de pixel en pixel on définit la notion de chemin connecté (4-connecté ou 8-connecté dans le plan), de composante connexe, de courbe et de courbe fermée. Le codage d'un chemin connecté est dû à Freeman en 1961 où chaque code représente le déplacement d'un point au suivant (cf. figure 5).

Une fois ces notions définies, une première difficulté vise à transcrire la notion analogique de courbe de Jordan qui permet de valider que tout chemin allant de l'intérieur d'une composante connexe vers l'extérieur de cette même composante doit intersecter la courbe par un point frontière (par analogie avec le continu, c'est un point dont le voisinage est composé d'une partie intérieure et d'une partie extérieure). Pour cela, il est important de choisir des notions de voisinage distincts entre la courbe et son complémentaire (cf. figure 6).

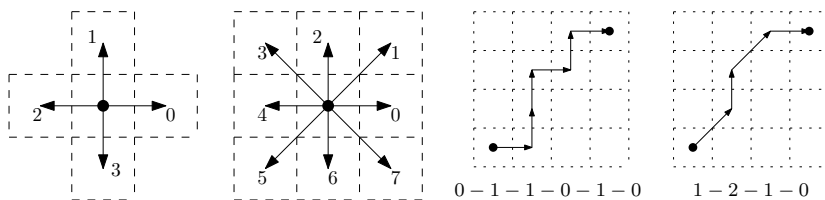


FIGURE 5. Codages de Freeman en 4- et 8-connexité suivis de codages de courbes 4-connexe et 8-connexe.

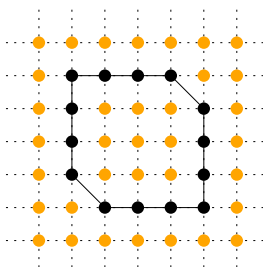


FIGURE 6. Illustration du théorème de Jordan discret : le complémentaire de la courbe discrète 8-connexe (pixels noirs) est composé de deux composantes 4-connexes (pixels orange).

Éléments géométriques : distances, droites et plans

De nombreux travaux ont porté sur l'introduction de la notion de distance. Si on identifie par (I_P, J_P) les coordonnées du pixel P , la notion de consécutivité propre à l'espace discret s'associe aux métriques discrètes d_1 et d_∞ définies par :

$$d_1(P, Q) = |I_P - I_Q| + |J_P - J_Q|$$

et

$$d_\infty(P, Q) = \max(|I_P - I_Q|, |J_P - J_Q|)$$

Ces distances sont couramment dénommées d_4 et d_8 dans le plan discret et d_6 et d_{26} dans l'espace en raison du nombre de points dans la boule unité [26]. Des travaux ont bénéficié du fait que toute combinaison linéaire positive de distances est une distance. Ceci a été exploité en alternant d_1 et d_∞ [21, 8]. On remarquera que la boule euclidienne circulaire est incluse dans la boule carrée associée à la distance d_∞ et contient la boule en forme de losange pour la distance d_1 (cf. figure 7).

Des travaux ont consisté à pondérer les déplacements horizontaux, verticaux et diagonaux. Ainsi sont apparues les distances de chanfrein [4].

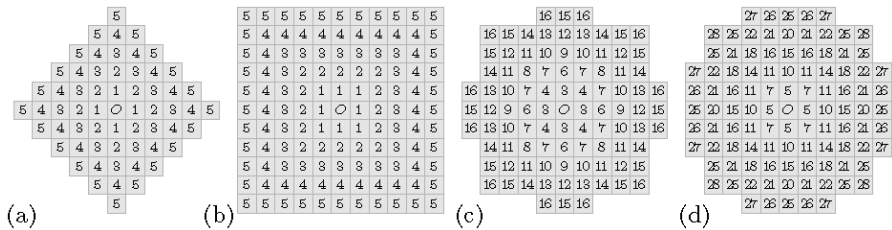


FIGURE 7. Boules associées aux distances (a) d_1 , (b) d_∞ , (c) chanfrein pour le masque (3,4) et (d) chanfrein pour le masque (5,7,11).

Ceci permet une meilleure approximation de la boule euclidienne (une boule de rayon r étant l'ensemble des points à distance inférieure à r). Ainsi, le poids 3 est proposé pour les directions horizontales ou verticales et le poids 4 pour les directions diagonales ou antidiagonales. Cela revient à approcher les distances euclidiennes exactes $(1, \sqrt{2})$ par $(1, \frac{4}{3})$. Si on étend le voisinage, Borgfors propose le masque (5,7,11) qui revient à approcher $(1, \sqrt{2}, \sqrt{5})$ par $(1, \frac{7}{5}, \frac{11}{5})$. La boule associée au masque (3,4) est un octogone (cf. figure 7c) et la boule associée au masque (5,7,11) est un dodécagone (cf. figure 7d).

La notion de droite en géométrie discrète a fait l'objet de nombreux travaux regroupant des chercheurs de différentes disciplines (topologie, arithmétique, combinatoire). Une première caractérisation d'une droite discrète porte sur un ensemble de propriétés locales. Elles sont liées à des considérations géométriques et utilisent le code de Freeman introduit dès 1974. Le principe de ce code est d'associer une valeur à un déplacement : par exemple, la valeur 0 pour chaque déplacement horizontal et la valeur 1 pour chaque déplacement diagonal (cf. figure 8). Ces propriétés stipulent que si un chemin 8-connexe est un segment de droite discrète, alors son code vérifie les propriétés suivantes :

- le code contient au plus deux valeurs différentes ;
- ces deux valeurs diffèrent au plus d'une unité (modulo 8) ;
- une des deux valeurs apparaît de manière isolée et ses apparitions sont uniformément espacées dans le codage du chemin 8-connexe.

Ces travaux ont été confortés avec l'introduction par Rosenfeld [25] de la propriété de la corde. Un ensemble de pixels X vérifie la propriété de la corde si pour tout couple de points P et Q de X et pour tout point $m(x,y)$ du segment réel $[PQ]$, il existe un point $M(i,j)$ de X tel que $\max(|i-x|, |j-y|) < 1$. Des premiers travaux aussi bien en 2D qu'en 3D sont apparus au début des années 80 [18, 10, 17].

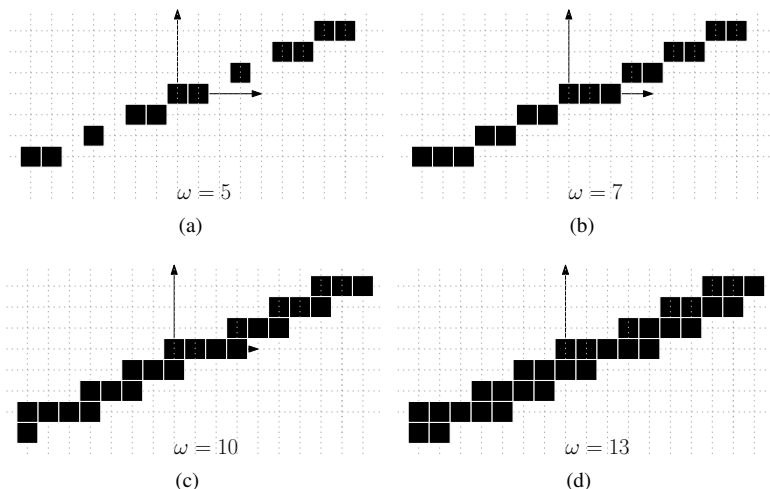


FIGURE 9. Droite discrète $0 \leq 3x + 7y < w$ avec différentes valeurs de w ($a = 3$, $b = 7$) : (a) droite non-connexe pour $w < \max(|a|, |b|)$, (b) droite 8-connexe dite naïve pour $w = \max(|a|, |b|)$, (c) droite standard pour $w = a + b$, (d) droite épaisse pour $w > a + b$.

Approche combinatoire

L'approche combinatoire consiste à trouver des décompositions des droites ou plans discrets en « briques » élémentaires. Elle a été introduite pour le codage. C'est ainsi que si on reprend l'exemple d'une droite discrète naïve, elle sera formée de sections (une section est une suite maximale de directions identiques) associées à deux directions consécutives, avec une des sections de longueur 1 et l'autre de longueur l ou $l + 1$. Par exemple, pour la droite de la figure 8, les sections de direction 0 sont de longueur 3 ou 4 et les sections de direction 1 sont de longueur 1. Toute droite discrète naïve est ainsi formée de triplets issus d'un ensemble de trois formes possibles au plus (cf. figure 11). Dans le cas d'une droite naïve horizontale, on verra apparaître le seul triplet formé de pixels associés au code de Freeman 0.

Ceci s'étend au plan discret naïf en définissant différentes familles de briques élémentaires. Ce sont les bi-cubes (2×2 voxels), les tri-cubes (3×3 voxels) ou les $n \times m$ cubes.

Un plan naïf contient au plus 9 tricubes différents parmi un ensemble possible de 40 tri-cubes [11, 30] (cf. figure 12).

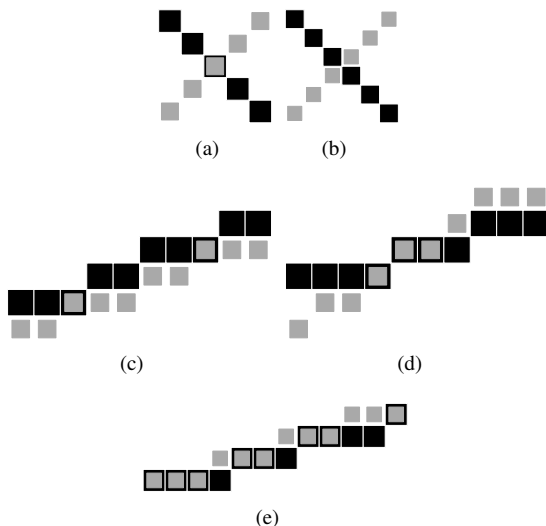


FIGURE 10. Intersection de deux droites discrètes. (a) 2 droites naïves avec un point unique; (b) intersection vide de 2 droites 8 naïves non parallèles; (c) intersection non vide de 2 droites parallèles; (d) intersection sous forme d'un ensemble connexe de pixels; (e) intersection sous forme d'ensemble non connexe de pixels.

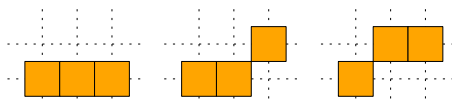


FIGURE 11. Configurations de triplets de pixels successifs présents dans la droite naïve illustrée en figure 8.

Changements de représentation

La définition dans l'espace discret de transformations géométriques telles que translation, rotation, homothétie n'est pas chose simple. Les travaux s'appuient sur l'introduction de la notion d'application quasi-affine définie comme la partie entière d'une application affine rationnelle [14]. Une translation discrète d'un point discret (x, y) élément de $\mathbb{Z}^2$ de vecteur d'amplitude (u, v) élément de $\mathbb{R}^2$, peut s'écrire :

$$T_{(u,v)} : (x, y) \mapsto (x + \lfloor u + 1/2 \rfloor, y + \lfloor v + 1/2 \rfloor)$$

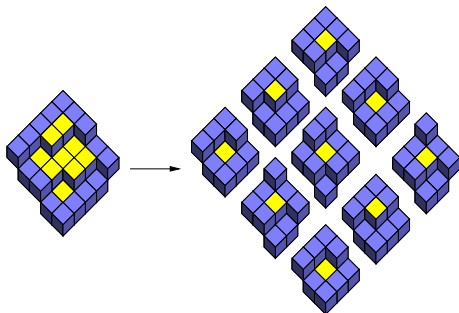


FIGURE 12. Portion du plan de vecteur normal $(6, 13, 27)$ avec sa décomposition en tri-cubes.

Pour une droite discrète, on sera amené à traduire point par point la droite discrète initiale selon la formule ci-dessus. Des travaux ont également été consacrés au cas de la rotation et de l'homothétie [15]. Aux côtés des transformations géométriques, des travaux ont porté sur les transformations topologiques discrètes dont l'objectif est de transformer un objet tout en préservant ses caractéristiques topologiques. Pour cela on s'intéresse à la notion de point simple qui une fois supprimé ne modifie pas la topologie au sens de la connexité de l'objet. Si celle-ci se définit au sens global de l'objet, les travaux ont abouti à une caractérisation locale des points simples et ont favorisé le développement d'algorithmes efficaces pour les transformations topologiques [2]. Le retrait successif des points simples aboutit à un amincissement homotopique de l'objet initial (cf. figure 13).

Ceci est largement illustré par l'étude des représentations par axe médian et squelette. L'axe médian d'une forme X est l'ensemble des pixels qui sont centres des boules maximales incluses dans X (une boule est maximale s'il n'existe pas de boule plus grande la contenant). À partir des pixels de l'axe médian et de l'information de rayon, on peut reconstruire la forme X comme une union de boules, même si la distance utilisée pour définir les boules est la distance de chanfrein [23]. On dit que la transformation axe médian est réversible. Le squelette d'une forme X est quant à lui l'ensemble des points qui disposent d'au moins deux points les plus proches dans le complémentaire de X . Ces deux notions ont de nombreuses applications en reconnaissance et description de formes et il existe des algorithmes aussi bien en géométrie discrète qu'en géométrie algorithmique et morphologie mathématique notamment en simplification et lissage de formes. Dans le domaine de la reconstruction tomographique, la transformée Mojet est une illustration de la transformation de Radon analogique versus tomographie discrète [13]. L'objectif est de reconstruire une forme à partir de la connaissance d'un certain nombre de ses projections selon k

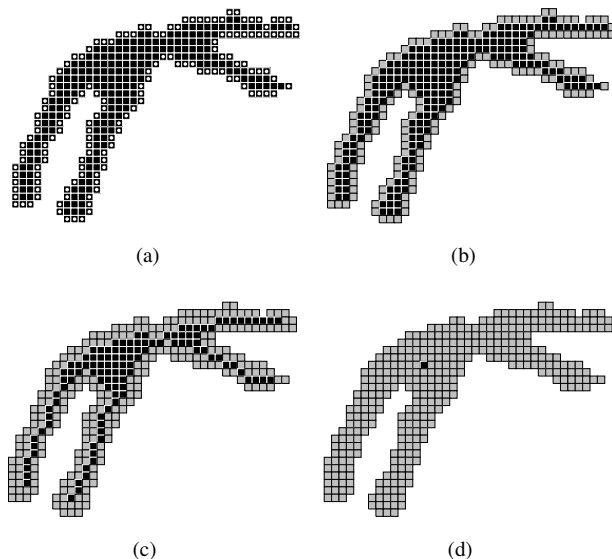


FIGURE 13. (a) forme initiale avec ses points simples marqués en blanc ; (b) amincissement homotopique de l'objet initial ; (c) amincissement homotopique de l'objet (d) ; amincissement homotopique ultime.

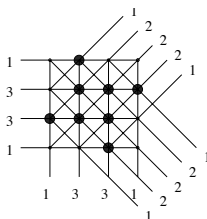


FIGURE 14. Reconstruction d'une forme représentée par les points noirs à partir de trois projections.

directions rationnelles. Tout comme pour la transformée de Radon on utilise le principe de rétroprojection en tenant compte de la contribution des différents pixels aux valeurs de projection, notamment les pixels qui ne contribuent qu'à une seule valeur de projection [22] (cf. figure 14).

Conclusion

Si la manipulation de nombres entiers semble simple a priori, il n'en demeure pas moins que la géométrie discrète nous amène à réfléchir sur la transcription de nos connaissances en géométrie euclidienne. Au travers de ce survol d'exemples, il en ressort que notre curiosité nous a amenés à fédérer une communauté puisant ses ressources dans l'arithmétique, la topologie et la combinatoire afin de définir et enrichir la géométrie discrète de manière rigoureuse. Aux côtés des définitions et des propriétés adaptées à la caractérisation et à la reconnaissance d'éléments de base comme une droite, un plan, une surface, un volume, des algorithmes ont été élaborés et rassemblés dans la bibliothèque DGtal ainsi qu'un ensemble d'articles parus dans *Lecture Notes in Computer Science* chez Springer. En conclusion, la géométrie discrète s'invite aux côtés de la géométrie algorithmique, la morphologie mathématique, la géométrie variationnelle et la géométrie algébrique pour le traitement des images qu'elles soient 2D, 3D ou 4D.

Remerciements

Une telle présentation n'aurait pu se faire sans emprunter différentes illustrations aux contributeurs des chapitres du livre IC2 [7].

Références

- [1] DGtal : Digital Geometry Tools and Algorithms Library. dgtal.org.
- [2] G. Bertrand and M. Couprie. New 2D parallel thinning algorithms based on critical kernels. In *Combinatorial Image Analysis, 11th International Workshop (IWCIA)*, volume 4040 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 45–59. Springer, 2006.
- [3] A Bogomolny. Digital geometry may not be discrete. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 43(2) :205–220, 1988.
- [4] G. Borgefors. Distance transformations in arbitrary dimensions. *CVGIP*, 27 :321–345, 1984.
- [5] J.M. Chassery. Connectivity and consecutivity in digital pictures. *Computer Graphics and Image Processing*, 9(3) :294–300, 1979.
- [6] D. Coeurjolly, A. Guillaume, and I. Sivignon. Reversible discrete volume polyhedrization using marching cubes simplification. *SPIE Vision Geometry XII*, 5300(1-11), 2004.
- [7] D. Coeurjolly, A. Montanvert, and J.M. Chassery. *Géométrie discrète et images numériques*. Traité IC2, série Signal et Image. Hermès et Lavoisier, 2007.
- [8] P. Das and B. Chatterji. Octogonal distances for digital pictures. *Information Sciences*, 50 :123–150, 1990.
- [9] I. Debled-Rennesson and J.P. Revelles. A linear algorithm for segmentation of digital curves. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 9(6) :635–662, 1995.
- [10] L. Dorst and A. N. M. Smeulders. Discrete representation of straight lines. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(4) :450–463, 1984.

- [11] Yan Gérard. Local configurations of digital hyperplanes. In *Discrete Geometry for Computer Imagery, 8th International Conference (DCGI)*, volume 1568 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 65–75. Springer, 1999.
- [12] B. Grünbaum and G. Shepard. *Tilings and Patterns — An Introduction*. Cambridge University Press, 1989.
- [13] G.T. Herman and A. Kuba. *Discrete Tomography, Foundations, Algorithms and Applications*. Birkhäuser, Boston, États-unis, 1999.
- [14] M.A. Jacob. Transformation of digital images by discrete affine applications. *Computers and Graphics*, 19 :373–389, 1995.
- [15] M.A. Jacob and E. Andrès. On discrete rotations. In *5th Workshop on DGCi Clermont-Ferrand*, pages 161–174, 1995.
- [16] E. Khalimsky, R. Koppermann, and P.R. Meyer. Computer graphics and connected topologies as finite ordered sets. *Topology and its Applications*, 36 :1–17, 1990.
- [17] C.E. Kim. Three-dimensional digital planes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(5) :639–645, 1984.
- [18] C.E. Kim and A. Rosenfeld. A digital straight lines and convexity of digital regions. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 4(2) :149–153, 1982.
- [19] R. Klette and A. Rosenfeld. *Digital Geometry - Geometric Methods for Digital Picture Analysis*. The Morgan Kaufman Series in Computer Graphics. Elsevier, 2004.
- [20] V.A. Kovalevsky. Finite topology as applied to image analysis. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 46 :141–161, 1989.
- [21] R. Møller. A survey of digital metrics. *Contemporary Mathematics*, 119(95-106), 1991.
- [22] N. Normand and J.P. Guédon. La transformée Mojet : une représentation redondante pour l'image. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Série I. Maths*, 326(1) :123–126, 1998.
- [23] E. Remy and E. Thiel. Medial axis for Chamfer distances : computing look-up tables and neighborhoods in 2D or 3D. *Pattern Recognition Letters*, 23 :649–661, 2001.
- [24] J.P. Reveilles. *Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmiques*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1991.
- [25] A. Rosenfeld. Arcs and curves in digital pictures. *Journal of ACM*, 20(1) :81–87, 1973.
- [26] A. Rosenfeld and J.L. Pfaltz. Distance functions on digital pictures. *Pattern Recognition*, 1 :33–61, 1968.
- [27] I. Stojmenovic and R. Tosić. Digitization schemes and the recognition of digital straight lines, hyperplanes and flats in arbitrary dimensions. *Vision Geometry, Contemporary Mathematics series*, 119 :205–221, 1991.
- [28] M. Tajine and A. Daurat. On local definitions of length of digital curves. In Heidelberg Springer, Berlin, editor, *Discrete Geometry for Computer Imagery, 11th International Conference, (DCGI)*, volume 2886 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 114–123, 2003.
- [29] The CGAL Project. *CGAL User and Reference Manual*. CGAL Editorial Board, 5.5.1 edition, 2022.
- [30] J. Vittone and J.M. Chassery. Recognition of digital naive planes and polyhedrization. In Springer, editor, *Discrete Geometry for Computer Imagery, 9th International Conference (DCGI)*, volume 1953 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 296–307, 2000.