



Le problème des trois cartes

Jean-Paul Delahaye¹

La rubrique « Récréation informatique » propose une petite énigme algorithmique ou sur un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel et solution du problème précédent

ÉTONNANTES PUISSANCES DE 2

Comme tout informaticien, vous êtes fascinés par les puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048... Si on observe le dernier chiffre (chiffre des unités), il est immédiat de constater et de démontrer que la série '2', '4', '8', '6' y est répétée indéfiniment : le dernier chiffre est donc dans 25 % des cas un '2', dans 25 % des cas un '4', dans 25 % des cas un '8' et dans 25 % des cas un '6'. Si on observe les deux derniers chiffres, on remarque (et on démontre sans mal encore) que la séquence '04', '08', '16', '32', '64', '28', '56', '12', '24', '48', '96', '92', '84', '68', '36', '72', '44', '88', '76', '52' revient périodiquement. On en déduit que le deuxième chiffre à partir de la droite (chiffre des dizaines) est périodiquement '0', '0', '1', '3', '6', '2', '5', '1', '2', '4', '9', '9', '8', '6', '3', '7', '4', '8', '7', '5'. Cette séquence périodique de longueur 20 comporte chaque chiffre deux fois exactement, ce qui a pour conséquence que le '0' sera le deuxième chiffre de 2^k à partir de la droite (chiffre des dizaines) dans 10 % des cas, et que c'est vrai aussi pour le '1', le

1. Professeur émérite, université de Lille, campus scientifique, CRISTAL UMR CNRS, 9189 Centre de recherche en informatique signal et automatique de Lille, bâtiment ESPRIT, 59655, Villeneuve d'Ascq Cedex France. E-mail : jean-paul.delahaye@univ-lille.fr.

'2', etc. Les chiffres en deuxième position à partir de la droite dans 2^k sont présents chacun avec une fréquence de 10 %. L'étude du chiffre en troisième position à partir de la droite (chiffre des centaines) conduit à la même conclusion, et il en va de même aussi pour le quatrième, etc. La propriété n'est pas facile à démontrer mais elle est vraie et avec un programme, on la vérifie expérimentalement [2].

Il est donc vrai que sauf pour le chiffre des unités, les chiffres des puissances de 2 placés en position n à partir de la droite ont chacun une fréquence d'apparition de 10 % et cela, quel que soit $n > 1$.

Considérons maintenant le second chiffre à gauche des 2^n qui peut être 0, 1, ..., 9. Une étude numérique montre, cette fois, que les dix chiffres n'ont pas la même fréquence d'apparition :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.120	0.114	0.109	0.104	0.100	0.097	0.093	0.090	0.087	0.084

FIGURE 1. Fréquence d'apparition du second chiffre à gauche de 2^n .

Parfois c'est plus que 0.1, parfois moins. Nous n'avons pas considéré le premier chiffre à gauche car il ne peut pas être '0' et donc, nous ne pouvions pas espérer avoir une fréquence d'apparition égale à 0.1.

N'est-il pas paradoxal que l'égalité des fréquences des 10 chiffres qu'on constate et qu'on démontre pour le chiffre des dizaines, pour le chiffres des centaines, etc. n'entraîne pas l'égalité des fréquences pour ce second chiffre à gauche ?

Comment l'expliquer ?

SOLUTION.

Le résultat concernant le second chiffre à gauche provient de la loi de Benford qui a été démontrée pour la suite des puissances de deux [1].

En base de numération b , la probabilité d'apparition du chiffre c en tête d'une puissance de deux est donc $\log_b(1 + \frac{1}{c})$. Un intéressant résultat indique que la probabilité qu'un nombre appartenant à une série de nombres vérifiant la loi de Benford commence par un entier quelconque c écrit en base b , par exemple $c = 314$, est aussi $\log_b(1 + \frac{1}{c})$.

La probabilité pour que le second chiffre à gauche en base 10 de 2^n soit un '0' est la probabilité qu'il commence par '10', ou '20', ..., ou '90'. C'est donc $\log_{10}(1 + \frac{1}{10}) + \log_{10}(1 + \frac{1}{20}) + \dots + \log_{10}(1 + \frac{1}{90}) \approx 0,1196792685$. De même, la probabilité pour que le second chiffre à gauche en base 10 de 2^n soit un '1' est la probabilité qu'il commence par '11', ou '21', ..., ou '91'. C'est donc $\log_{10}(1 + \frac{1}{11}) + \log_{10}(1 + \frac{1}{21}) + \dots + \log_{10}(1 + \frac{1}{91}) \approx 0,1138901039$. Et ainsi de suite...

Les calculs provenant des résultats (démontrés) de la théorie coïncident sans surprise avec ceux obtenus par programme donnés dans l'énoncé. On aura donc beau

mener les calculs en faisant tourner très longtemps son ordinateur, on ne trouvera jamais des fréquences égales pour les dix chiffres possibles en seconde position dans l'écriture décimale de 2^n .

Il n'y a cependant aucune contradiction entre ce qui se produit pour le second chiffre de 2^n et ce qui se passe pour les chiffres comptés à partir de la droite (chiffres des dizaines, chiffres des centaines, etc.). La chose est un peu étonnante et provient de la remarque suivante. Le second chiffre à gauche n'est pas toujours au même rang quand on compte à partir de la droite. Après 1, 2, 4, 8 qui n'ont qu'un chiffre, dans un premier temps, pour 16, 32, 64 ; le second chiffre à partir de la gauche est le même que le premier chiffre à partir de la droite. Mais pour 128, 256, 512, le second chiffre à partir de la gauche est devenu le second chiffre à partir de la droite. Un peu plus loin cela change encore, et cela change tout le temps car la longueur de l'écriture décimale de 2^k augmente indéfiniment. Cela rend compatibles les diverses affirmations : l'égale répartition dans l'écriture décimale de 2^n pour les chiffres des dizaines, pour les chiffres des centaines, etc. n'oblige pas à une égale répartition pour le second chiffre significatif. Si vous avez des doutes, la seule solution est de contrôler par programme tout ce qui a été affirmé.

Nouveau problème

LE PROBLÈME DES TROIS CARTES

Le présentateur met trois cartes dans un chapeau. La première carte est rouge sur ses deux faces (*RR*), la seconde blanche sur ses deux faces (*BB*), la troisième rouge d'un côté et blanche de l'autre (*RB*).

Le présentateur demande à une personne qui a les yeux bandés de prendre une carte du chapeau, de la sortir en n'en montrant qu'une face au hasard. La face montrée est rouge. On s'intéresse alors à la couleur non visible de la carte choisie.

Le présentateur vous propose un pari sur la couleur de la face non visible de la carte choisie : il vous donnera cinq euros si la couleur choisie est blanche, vous lui donnerez quatre euros si elle est rouge. Est-il dans votre intérêt de parier ?

Vous vous dites : « La carte choisie est l'une des cartes *RR* ou *RB*. Si c'est la première, la face cachée est rouge, si c'est la seconde la face cachée est blanche. La carte choisie a été tirée au hasard, il y a donc une chance sur deux que ce soit l'une ou l'autre, et donc que je gagne. Le pari proposé m'est donc favorable. J'accepte. »

Vous avez tort d'accepter. Pourquoi ?



Envoyez vos réponses à jean-paul.delahaye@univ-lille.fr. Les noms des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.

Références

- [1] Arnold, V.I. and Avez, A. *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. Mathematical physics monograph series, ed. Benjamin, 1968.
- [2] Michael Fuchs Digital Expansion of Exponential Sequences J. Theor. Nombres Bordeaux, 14 :2, 477-487, 2002.