



Étonnantes puissances de 2

Jean-Paul Delahaye¹

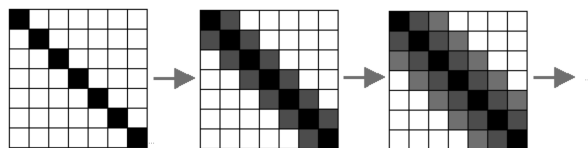
La rubrique « Récréation informatique » propose une petite énigme algorithmique ou sur un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel et solution du problème précédent

L'INFECTION DU DAMIER

Un damier de taille carrée et de n cases de côté subit une infection dont la règle de fonctionnement est la suivante : si une case non infectée a au moins deux voisines infectées, elle l'est à la seconde suivante. Ne comptent comme voisines d'une case donnée que la case en dessous, la case au-dessus, la case à gauche, et la case à droite.

Si on suppose qu'à un instant donné toutes les cases d'une diagonale sont infectées alors on comprend que progressivement toutes les cases se trouveront infectées.



1. Professeur émérite, université de Lille, campus scientifique, CRISTAL UMR CNRS, 9189 Centre de recherche en informatique signal et automatique de Lille, bâtiment ESPRIT, 59655, Villeneuve d'Ascq Cedex France. E-mail : jean-paul.delahaye@univ-lille.fr.

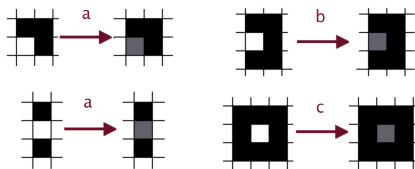
Le mécanisme d'infection semble particulièrement violent et rapide, pourtant tout n'est pas possible, et même si cela semble paradoxal, pour infecter le damier de côté n dans son entier, il faut, qu'au départ, il y ait au moins n cellules infectées.

Pouvez-vous le démontrer ? Le plus étonnant dans ce problème est qu'un seul mot donne la démonstration recherchée.

SOLUTION.

Merci à Marie Davenne et Jean-Michel Batto qui m'ont fait parvenir les bonnes solutions. Le mot qui donne la solution la plus simple est « périmètre ». En effet, quand une case est infectée, trois cas sont possibles :

- a) le périmètre de l'ensemble des cases infectées augmente de deux unités et diminue de deux unités, donc reste stable ; cette situation se présente lorsque la nouvelle case infectée est entourée exactement de deux cases déjà infectées ;
- b) le périmètre diminue de 2 ; cette situation se présente lorsque la nouvelle case infectée est entourée de trois cases infectées ;
- c) le périmètre diminue de 4 ; cette situation se présente lorsque la nouvelle case infectée est entourée par ses quatre côtés.



Le périmètre de l'ensemble des cases infectées n'augmente donc jamais. Le périmètre du damier est $4n$, il faut donc, pour infecter tout le damier, avoir au moins n cases infectées au départ et qu'elles ne se touchent pas.

Nouveau problème

ÉTONNANTES PUISSANCES DE 2

Comme tout informaticien, vous êtes fascinés par les puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048... Si on observe le dernier chiffre (chiffre des unités), il est immédiat de constater et de démontrer que la série '2', '4', '8', '6' y est répétée indéfiniment : le dernier chiffre est donc dans 25 % des cas un '2', dans 25 % des cas un '4', dans 25 % des cas un '8' et dans 25 % des cas un '6'. Si on observe les deux derniers chiffres, on remarque (et on démontre sans mal encore) que la séquence '04', '08', '16', '32', '64', '28', '56', '12', '24', '48', '96', '92', '84', '68', '36', '72', '44', '88', '76', '52' revient périodiquement. On en déduit que le deuxième chiffre à partir de la droite (chiffre des dizaines) est périodiquement '0',

'0', '1', '3', '6', '2', '5', '1', '2', '4', '9', '9', '8', '6', '3', '7', '4', '8', '7', '5'. Cette séquence périodique de longueur 20 comporte chaque chiffre deux fois exactement, ce qui a pour conséquence que le '0' sera le deuxième chiffre de 2^k à partir de la droite (chiffre des dizaines) dans 10 % des cas, et que c'est vrai aussi pour le '1', le '2', etc. Les chiffres en deuxième position à partir de la droite dans 2^k sont présents chacun avec une fréquence de 10 %. L'étude du chiffre en troisième position à partir de la droite (chiffre des centaines) conduit à la même conclusion, et il en va de même aussi pour le quatrième, etc. La propriété n'est pas facile à démontrer mais elle est vraie et avec un programme, on la vérifie expérimentalement [1].

Il est donc vrai que sauf pour le chiffre des unités, les chiffres des puissances de 2 placés en position n à partir de la droite ont chacun une fréquence d'apparition de 10 % et cela, quel que soit $n > 1$.

Considérons maintenant le second chiffre à gauche des 2^n qui peut être 0, 1, ..., 9. Une étude numérique montre, cette fois, que les dix chiffres n'ont pas la même fréquence d'apparition :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.120	0.114	0.109	0.104	0.100	0.097	0.093	0.090	0.087	0.084

FIGURE 1. Fréquence d'apparition du second chiffre à gauche de 2^n .

Parfois c'est plus que 0.1, parfois moins. Nous n'avons pas considéré le premier chiffre à gauche car il ne peut pas être '0' et donc, nous ne pouvions pas espérer avoir une fréquence d'apparition égale à 0.1.

N'est-il pas paradoxal que l'égalité des fréquences des 10 chiffres qu'on constate et qu'on démontre pour le chiffre des dizaines, pour le chiffres des centaines, etc. n'entraîne pas l'égalité des fréquences pour ce second chiffre à gauche ?

Comment l'expliquer ?

Envoyez vos réponses à jean-paul.delahaye@univ-lille.fr. Les noms des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.

Références

- [1] Michael Fuchs Digital Expansion of Exponential Sequences J. Theor. Nombres Bordeaux, 14 :2, 477-487, 2002.