L'infection du damier

Jean-Paul Delahaye [1]

La rubrique « Récréation informatique » propose une petite énigme algorithmique ou sur un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel et solution du problème précédent

Les pièces magnétiques

On procède à des lancers successifs de pièces magnétiques dans une boîte à deux compartiments A et B. Au départ, il y a une pièce dans chaque compartiment. Quand on lance une nouvelle pièce magnétique, elle peut tomber dans le compartiment A ou dans le compartiment B. S'il y a x pièces dans A et y dans B, du fait de son magnétisme, la nouvelle pièce tombe dans A avec une probabilité $\frac{x}{x+y}$ et dans B avec une probabilité $\frac{y}{x+y}$. On lance ainsi 1000 pièces magnétiques en plus des deux pièces initiales.

Quelle est la probabilité pour que le nombre de pièces s'équilibre exactement entre A et B quand on a lancé les 1000 pièces ? Quelle est la probabilité pour que toutes les pièces lancées aillent en A ?

Indication : le résultat est simple.

1. Professeur émérite, université de Lille, campus scientifique, CRIStAL UMR CNRS, 9189 Centre de recherche en informatique signal et automatique de Lille, bâtiment ESPRIT, 59655, Villeneuve d'Ascq Cedex France. E-mail : jean-paul.delahaye@univ-lille.fr.

DOI:10.48556/SIF.1024.18.161 **1024** – Bulletin de la SiF, numéro 18, Novembre 2021, pp. 161–163

SOLUTION.

Merci à Eric Wegrzynowski et Marilyne Rosselle qui m'ont fait parvenir la solution.

La solution est que toutes les répartitions possibles pour les 1000 nouvelles pièces lancées $(0,1000),(1,999),(2,998),...,(1000,0)$ ont la même probabilité d'être observées, soit $\frac{1}{1001}$ exactement. Le démontrer ne semble pas immédiat. Le raisonnement suivant, dû à Peter Winkler [1], est particulièrement rapide et astucieux. Il se base sur une modélisation de la boîte à l'aide d'un jeu de cartes.

On imagine un jeu de 1000 cartes blanches et une carte rouge. On va mélanger ces cartes d'une manière parfaite et, cela donnera la réponse à notre problème de pièces magnétiques ! On prend en main toutes les cartes, la rouge au-dessus, les 1000 blanches numérotées de 1 à 1000, en dessous. On pose la carte rouge sur la table. On prend la carte blanche numéro 1 et on la place au hasard en dessous ou au-dessus de la carte rouge (50 % de chances de la placer en dessous, 50 % de chances de la placer au-dessus). On prend la carte blanche numéro 2, on la place au hasard à l'une des trois places possibles dans le paquet de deux cartes posés sur la table (c'est-à-dire, on place la carte au-dessus des deux premières avec la probabilité $\frac{1}{3}$, entre les deux cartes déjà sur la table avec la probabilité $\frac{1}{3}$, et en dessous avec la probabilité $\frac{1}{3}$). On procède de même avec la carte blanche numéro 3 (quatre possibilités, chacune avec une probabilité $\frac{1}{4}$). Et ainsi de suite, jusqu'à la carte blanche numéro 1000. En procédant ainsi, on a parfaitement mélangé les 1001 cartes, car la méthode ne favorise aucun emplacement pour aucune carte. On peut vérifier par un petit calcul qu'une fois n cartes placées, chacune possède exactement une chance sur n d'être en position n.

Examinons maintenant ce qu 'il se passe par rapport à la carte rouge quand on place la carte blanche numéro $n-1$ dans le paquet de $n-1$ cartes ($n-2$ blanches et la rouge). Si on note $x-1$ le nombre de cartes blanches sur la carte rouge et $y-1$ le nombre de cartes blanches sous la carte rouge ($x+y=n$), en plaçant la carte numéro $n-1$, on a une probabilité $\frac{x}{x+y}$ de la placer sur la carte rouge et $\frac{y}{x+y}$ de la placer sous la carte rouge. C'est exactement la même chose que lorsqu'on lance la pièce dans la boîte à deux compartiments A et B avec x pièces en A et y en B. Le procédé de placement des cartes blanches sous ou sur la carte rouge est parfaitement analogue à celui du remplissage des compartiments A et B de l'urne.

La répartition finale x pour A, y pour B, des 1000 pièces lancées dans l'urne (en ne prenant pas en compte les deux pièces initiales) est donc atteinte avec la même probabilité que la répartition de x cartes blanches au-dessus de la carte rouge et y cartes blanches en dessous de la carte rouge. Ces différentes probabilités sont aussi égales à celle que la carte rouge soit placée en position $x+1$ quand on mélange parfaitement un paquet de 1001 cartes, c'est-à-dire $\frac{1}{1001}$. Toutes les répartitions sont donc équivalentes : il y a exactement la même probabilité de placer toutes les nouvelles billes en A que d'en placer 500 en A et 500 en B, ou n'importe quelle autre répartition $(x, 1000-x)$.

Ce problème est dû à George Polya [2]. Si vous avez des doutes sur le raisonnement, vous pouvez faire quelques expériences avec une urne (ou un jeu de cartes) en prenant 5 ou 10 pièces au lieu de 1000... ou en écrivant un programme.

Nouveau problème

L'INFECTION DU DAMIER

Un damier de taille carrée et de n cases de côté subit une infection dont la règle de fonctionnement est la suivante : si une case non infectée a au moins deux voisines infectées, elle l'est à la seconde suivante. Ne comptent comme voisines d'une case donnée que la case en dessous, la case au-dessus, la case à gauche, et la case à droite.

Si on suppose qu'à un instant donné toutes les cases d'une diagonale sont infectées alors on comprend que progressivement toutes les cases se trouveront infectées (cf. figure 1).

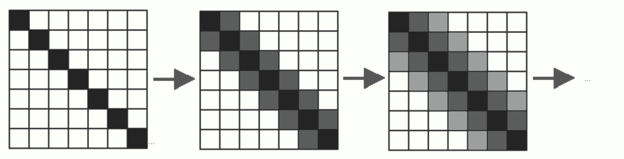

FIGURE 1. Infection progressive du damier.

Le mécanisme d'infection semble particulièrement violent et rapide, pourtant tout n'est pas possible, et même si cela semble paradoxal, pour infecter le damier de côté n dans son entier , il faut , qu'au départ , il y ait au moins n cellules infectées.

Pouvez-vous le démontrer ? Le plus étonnant dans ce problème est qu'un seul mot donne la démonstration recherchée.

Envoyez vos réponses à jean-paul.delahaye@univ-lille.fr. Les noms des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.

Références

[1] Winkler Peter. Mathematical puzzles : a connoisseur's collection. CRC Press, 2003.

[2] Polya, George. How to solve it : A new aspect of mathematical method. No. 246. Princeton university press, 2004.