



Moins de 20 cartes

Jean-Paul Delahaye¹

La rubrique « Récréation informatique » propose une petite énigme algorithmique ou à propos d'un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel et solution du problème précédent

S'APPROCHER DU BUT

Ce petit problème m'a été proposé par Aurélien Géron. Vous êtes placé en un point O , et à une distance d'une unité, il y a un point I . Vous devez vous rendre le plus près possible d'un point X sur le segment de droite OI (par exemple à moins d'un millièmme d'unité de X), mais vous ne pouvez vous déplacer que par sauts successifs selon la règle simple suivante :

Vous choisissez le point O ou le point I , et votre saut vous conduit alors au point situé au milieu entre le point P ou vous êtes, et le point choisi.

Si, par exemple, vous partez de O et choisissez la séquence I, O, I, I , cela vous mène respectivement aux positions $0,5 - 0,25 - 0,625 - 0,8125$.

Fixons maintenant un objectif X à atteindre à moins d'un millièmme (ou un millièmme, etc.). Par exemple X situé à $1/\pi$ de O . Quelle est la plus courte séquence de choix O ou I qui permet de réussir ? Vous noterez qu'appliquer le principe naturel « si je suis entre O et X , je vais vers I , si je suis entre X et I , je vais vers O » ne marche pas du tout.

1. Université de Lille 1, Sciences et Technologies, Centre de recherche en informatique signal et automatique de Lille (CRISTAL), UMR 9189 CNRS, Bât M3-ext, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex. E-mail : jean-paul.delahaye@univ-lille1.fr.

SOLUTION. Merci aux lecteurs qui m'ont fait parvenir la bonne réponse. Ce sont dans l'ordre d'arrivée des messages : Éric Wegrzynowski, Raymond Namyst, Julien Bernard, Patrick Kamnang, Dimitri Gallois.

Pour aller vers le point situé à X de O (X un nombre entre 0 et 1), voici comment procéder :

- (a) on écrit X en base 2, $X=0,110101101$ par exemple ;
- (b) on lit les chiffres à l'envers ce qui donne 1 0 1 1 0 1 0 1 1 ;
- (c) on interprète les '0' par « aller vers O », et les '1' par « aller vers I ».

Ici, cela donne : vers I, vers O, vers I, vers I, vers O, vers I, vers O, vers I, vers I. Le nombre $1/\pi$ s'écrit $0,0101000101$ en base 2 au millième près car :

$$1/\pi - (1/4 + 1/16 + 1/256 + 1/1024) = 0,000927073684.$$

On en déduit que pour s'en approcher à moins d'un millième, il faut choisir les mouvements suivants : vers I, vers O, vers I, vers O, vers O, vers O, vers I, vers O, vers I, vers O.

Démontrons que ce procédé fonctionne.

(A) Si je suis à X de O et que je vais vers O, je passe en $X/2$, ce qui revient à placer un 0 entre la virgule et les chiffres de X écrit en base 2 ($0,11110101$ devient par exemple $0,011110101$).

(B) Si je suis en X que je vais vers I, la distance à I qui était $(1-X)$ devient $(1-X)/2$, et donc le point où j'arrive est à $1 - (1-X)/2 = 1/2 + X/2$ de O. Ce nombre s'écrit en base 2 en plaçant un '1' entre la virgule et les chiffres de X écrits en base 2 ($0,1011001$ devient par exemple $0,11011001$).

En résumé, si on calcule en base 2 :

- quand on va vers O, on insère un '0' après la virgule ;
- quand on va vers I, on insère un '1' après la virgule.

Examinons maintenant un exemple avec plusieurs déplacements vers O ou vers I. Si on part de O et qu'on va successivement vers I, vers I, vers O, vers O, vers I, vers O, vers I (ce qu'on peut noter IIOOIOI), on obtient successivement

0,
 0,1 (insertion d'un 1 après la virgule)
 0,11 (insertion d'un 1 après la virgule)
 0,011 (insertion d'un 0 après la virgule)
 0,0011 (insertion d'un 0 après la virgule)
 0,10011 (insertion d'un 1 après la virgule)
 0,010011 (insertion d'un 0 après la virgule)
 0,1010011 (insertion d'un 1 après la virgule)

Comme on le voit, le nombre obtenu a pour développement binaire $0,1010011$, ce qu'on obtient en inversant l'ordre des opérations « vers O » et « vers I » (et en assimilant les 'O' aux '0', et les 'I' aux '1').

Cela signifie que pour aller vers un nombre X et s'en approcher avec une précision de $1/2^n$, il faut écrire X en base 2 jusqu'au n -ième chiffre après la virgule puis lire à l'envers les chiffres obtenus pour connaître les opérations de saut à exécuter.

Assez étrangement, pour s'approcher d'un point donné il faut donc commencer par les derniers chiffres de la valeur approchée qu'on souhaite obtenir à la fin. C'est un peu étonnant, car le plus souvent – et en particulier pour se déplacer sur une carte vers un point précis – on procédera progressivement. On s'approche en gros du point visé (on va, par exemple, dans la capitale du pays du lieu qu'on cherche à approcher), puis on s'occupe plus finement du but (on va vers la grande ville la plus proche du but), puis encore plus finement (on va vers le village le plus proche du but), etc. Ici, paradoxalement, il faut procéder par une méthode inverse, et s'occuper en premier des plus petits détails !

Nouveau Problème

MOINS DE 20 CARTES

Voici un petit problème dont on dit qu'il a été utilisé par les recruteurs de Google lors de tests d'embauche.

Cent nombre différents sont écrits sur cent cartes différentes, qu'on dispose à plat sur une table en 10 lignes de 10 cartes. Dans chaque ligne et dans chaque colonne les nombres sont classés par ordre croissant (de gauche à droite et de haut en bas). Les cartes ont été tournées et vous ne voyez donc pas les nombres qui y sont inscrits. Trouvez un algorithme qui, pour tout nombre donné, vous indique si oui ou non il est présent sur une des cent cartes, et cela en retournant moins de 20 cartes.

Envoyez vos réponses à jean-paul.delahaye@univ-lille1.fr. Le nom des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.